2010 г. ноябрь — декабрь *т. 65, вып. 6 (396)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.5+517.982

Независимые функции и геометрия банаховых пространств

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев

Основная цель этого обзора – дать представление о современном состоянии тех разделов теории независимых функций, которые связаны с вопросами геометрии функциональных пространств. "Величина" суммы независимых функций оценивается как в терминах классических моментов, так и в терминах норм симметричных пространств. Наибольшее внимание уделяется неравенству Розенталя и различным его обобщениям, границам их распространения на симметричные пространства. Центральная роль при этом принадлежит конструкции оператора Круглова, развитой в последние годы. В обзоре приведен также ряд приложений к геометрии банаховых пространств. В частности, рассматриваются варианты классических неравенств Морэ–Хинчина, изоморфизмы симметричных пространств на отрезке и полуоси, а также описание класса симметричных пространств, в которых любая последовательность симметрично и одинаково распределенных независимых случайных величин порождает гильбертово подпространство.

Библиография: 87 названий.

Ключевые слова: независимые функции, неравенства Хинчина, неравенства Розенталя, свойство Круглова, оператор Круглова, симметричное пространство, пространство Орлича, пространство Марцинкевича, пространство Лоренца, индексы Бойда, K-функционал, вещественный метод интерполяции, интегрально-равномерная норма.

Содержание

Первый автор поддержан Австралийским исследовательским советом и РФФИ (грант № 10-01-00077); второй автор поддержан Австралийским исследовательским советом.

1. Введение

Последовательности независимых функций являются предметом изучения как теории вероятностей, так и теории функций и функционального анализа. Основная цель этого обзора – дать представление о современном состоянии тех разделов их теории, которые связаны с вопросами геометрии функциональных (прежде всего, симметричных) пространств. В центре нашего внимания будут неравенства, так или иначе связанные с описанием подпространств, порожденных последовательностями независимых функций в пространствах измеримых функций. Пионерской в этом отношении явилась работа Х. П. Розенталя [1], где были доказаны замечательные неравенства, позволившие описать изоморфные типы таких подпространств в L_p-пространствах. Хотелось бы также упомянуть две следующие тематически близкие обзорные статьи, опубликованные ранее в “Успехах математических наук”. В первой из них [2], написанной В. Ф. Гапошкиным в 1966 г., в центре внимания находятся теоретико-функциональные свойства последовательностей как независимых, так и слабо зависимых (лакунарных) систем функций (сходимость и абсолютная сходимость, интегрируемость, предельные теоремы, закон повторного логарифма и т. д.). Второй обзор [3], авторы которого – Г. Пешкир и А. Н. Ширяев, написан гораздо позднее и посвящен изучению важнейшей и в то же время наиболее простой из систем независимых функций – системы Радемахера, возможности переноса ее свойств на общие мартингальные последовательности. Отметим, что изучению этой же системы, но только с точки зрения ее поведения в симметричных функциональных пространствах, посвящена также недавно опубликованная книга [4].

Речь в обзоре будет идти, в основном, о следующей задаче: предположим, что $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых случайных величин (с. в.) на некотором вероятностном пространстве. Требуется каким-то образом оценить “величину” сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ $(n = 1, 2, \dots)$. В случае, когда последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из одинаково распределенных с. в. с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$, эта проблема, разумеется, восходит к основаниям теории вероятностей. Давно известно, что при этих условиях пределом вероятностей $\mathsf{P}\{S_n/(\sigma\sqrt{n}\,) > \tau\}$ при $n \to \infty$ будет стандартное гауссовское распределение. Обобщениям и уточнениям этого фундаментального факта посвящено необозримое количество статей и монографий (см. любой достаточно развернутый курс теории вероятностей). Наш подход иной: нас будут интересовать не асимптотические, а приближенные решения этой задачи. При этом в качестве “меры” $|S_n|$ будет рассматриваться не “хвост” распределения суммы, т. е. величина $\mathsf{P}\{|S_n| > \tau\}$ (его оценкам также посвящено большое количество исследований), а норма $\|S_n\|_X$ в том или ином функциональном пространстве X. Прежде всего, конечно, с этой точки зрения важна информация о классических моментах сумм $\|S_n\|_p = (\mathsf{E}|S_n|^p)^{1/p}$ $(p > 0)$. В этой связи возникает задача найти величину A_n (как можно более простую) такую, что для некоторой константы $C > 0$ выполнено:

$$C^{-1} A_n \leqslant \|S_n\|_p \leqslant C A_n \qquad (p > 0).$$

Этот вопрос будет в центре нашего внимания в первой части обзора (раздел 3).

Хорошо известно, насколько отличается поведение сумм независимых функций в пространствах L_p при конечных p и в пространстве L_∞. При этом происходящим явлениям, как правило, нельзя дать объяснение, находясь “внутри” L_p-шкалы. В то же время это можно сделать, выйдя за ее пределы и рассматривая общие симметричные пространства функций. Об этом пойдет речь во второй, главной части обзора (разделы 4–6). Нас, в основном, будут интересовать обобщения неравенства Розенталя (см. п. 3.1), границы его распространения на симметричные пространства. Как мы увидим в дальнейшем, последнее напрямую связано с возможностью сравнения сумм независимых и дизъюнктных функций. Центральное место занимает здесь конструкция так называемого оператора Круглова, которая была введена авторами обзора и имеет своим истоком одноименное свойство симметричного пространства, принадлежащее М. Ш. Браверману. Этот подход позволил использовать многочисленные преимущества операторного языка, например, применять теорию интерполяции операторов. В третьей и последней части обзора (разделы 7–10) рассматриваются приложения к вопросам геометрии симметричных пространств. Так, в терминах свойств оператора Круглова дана характеризация симметричных пространств, в которых справедлив вариант неравенства Хинчина, найдены наиболее широкие на сегодняшний день достаточные условия, при которых симметричные пространства на $[0,1]$ и $(0,\infty)$ изоморфны между собой, решен ряд других задач.

Упомянем о еще двух важных направлениях, напрямую относящихся к данному обзору, но не включенных в него в связи с ограниченностью места. Первое направление достаточно полно отражено в работе [5], где устанавливается прямая связь между ограниченностью оператора Круглова и ограниченностью оператора случайных перестановок, естественным образом описывающего хорошо известные неравенства С. Квапеня и К. Шютта [6], [7]. Второе относится к некоммутативной теории вероятностей, когда измеримые независимые функции заменяются соответствующими последовательностями операторов. Мы отсылаем читателя к работе [8], где получены некоммутативные неравенства Розенталя. Библиографии в [5] и [8] дают, на наш взгляд, неплохое представление о развитии указанных направлений.

Изложим здесь же наиболее важные классические результаты, ставшие стимулом для дальнейших исследований. В 1923 г. А. Я. Хинчин в работе “Über dyadische Brüche” [9] доказал свои знаменитые неравенства, которые мы приведем в форме, принятой в теории функций, используя функции Радемахера $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\ \ (n \in \mathbb{N})$.

Теорема 1 (неравенства Хинчина). *Для любого* $0 < p < \infty$ *существуют такие константы* $A_p > 0$ *и* $B_p > 0$, *что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и произвольных* $a = (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$A_p\|a\|_2 \leqslant \biggl\|\sum_{k=1}^n a_k r_k\biggr\|_p \leqslant B_p\|a\|_2, \tag{1}$$

где, как обычно, $\|f\|_p$ – *норма в пространстве* $L_p[0,1]$, *а* $\|a\|_2 = \biggl(\sum_k |a_k|^2\biggr)^{1/2}$. *При этом* $B_p \leqslant \sqrt{p}\ \ (p \geqslant 1)$ *и* $B_p \sim \sqrt{p/e}$ *при* $p \to \infty$.

Эта теорема показывает, что L_p-нормы полиномов по системе Радемахера эквивалентны нормам последовательностей их коэффициентов в l_2. С точки зрения геометрии пространств последнее означает, что система Радемахера эквивалентна в $L_p[0,1]$ $(0 < p < \infty)$ каноническому базису в l_2. Классическое доказательство теоремы 1 можно найти, например, в монографии [10; § 4.5] или в самом начале обзора [3]. Обобщением неравенств Хинчина явились неравенства Марцинкевича–Зигмунда [11], опубликованные в 1937 г. (позднее было доказано, что при выполнении условий следующей теоремы система независимых функций даже эквивалентна системе Радемахера по распределению [4; теорема 8.4 и следствие 8.3]).

Теорема 2 (неравенства Марцинкевича–Зигмунда). *Пусть* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – *система независимых функций на* $[0,1]$, *удовлетворяющая условиям*:

$$\|f_k\|_2 = 1, \quad \|f_k\|_\infty \leqslant M, \quad \int_0^1 f_k(t)\,dt = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Тогда для каждого $p \geqslant 1$ *существует константа* $C_{M,p} > 0$, *зависящая лишь от* M *и* p, *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и произвольных* $a = (a_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ *выполнено*:

$$C_{M,p}^{-1}\|a\|_2 \leqslant \biggl\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\biggr\|_p \leqslant C_{M,p}\|a\|_2. \tag{3}$$

Последняя теорема – простое следствие доказанной в [11] (см. также [12; теорема 2.5]) экспоненциальной оценки для распределения полиномов по системе независимых функций, имеющей свойства (2).

Теорема 3. *Если система независимых функций* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяет условиям* (2), *то для любых* $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ *и* $\tau > 0$ *справедливо неравенство*

$$\lambda\biggl\{t \in [0,1] : \biggl|\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\biggr| > \tau\|a\|_2\biggr\} \leqslant 2e^{-\tau^2/(4M^2)}. \tag{4}$$

Заметим, что значительно раньше, в 1929 г., оценки распределений сумм независимых функций, подобные (4), были доказаны А. Н. Колмогоровым [13]. При этом в отличие от предыдущих результатов они справедливы не только для систем равномерно ограниченных функций.

Теорема 4 (неравенства Колмогорова). *Пусть* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – *система ограниченных независимых с. в. таких, что* $\mathsf{E} f_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. *Обозначим*

$$m_k = \|f_k\|_\infty, \quad M_n = \max_{k=1,\dots,n} m_k, \quad b_k = \mathsf{E} f_k^2, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ *и* $\tau > 0$

$$\lambda\biggl\{t \in [0,1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) > \tau\biggr\} \leqslant e^{-\tau/(4B_n)}, \quad \textit{если } \tau \geqslant \frac{B_n}{M_n}\,,$$

и

$$\lambda\biggl\{t \in [0,1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) > \tau\biggr\} \leqslant e^{-\tau^2/(4B_n)}, \quad \textit{если } \tau \leqslant \frac{B_n}{M_n}\,.$$

Позднее, в 1959 г., Ю. В. Прохоров [14] доказал следующее замечательное усиление этих неравенств.

Теорема 5 (неравенство Прохорова). *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда в тех же обозначениях справедливо неравенство*

$$\lambda\biggl\{\sum_{k=1}^n f_k > t\biggr\} \leqslant \exp\biggl(-\frac{t}{2M_n}\operatorname{arcsh}\frac{tM_n}{2B_n}\biggr).$$

2. Определения, обозначения, предварительные сведения

Пусть (T, Σ, μ) – пространство с σ-конечной мерой μ, заданной на σ-алгебре Σ подмножеств множества T. Совокупность всех почти всюду (п. в.) конечных измеримых вещественнозначных функций (классов эквивалентности) на T с естественными алгебраическими операциями и топологией сходимости по мере μ на множествах конечной меры является линейным топологическим пространством, которое мы будем обозначать через $S(T, \Sigma, \mu)$. Как обычно, функции, совпадающие почти всюду, отождествляются, а запись $x \leqslant y$ $(x, y \in S(T, \Sigma, \mu))$ означает, что $x(t) \leqslant y(t)$ при почти всех $t \in T$. Далее нас будут интересовать, главным образом, случаи, когда T – это отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега λ, n-мерный $[0,1]^n$ $(n \in \mathbb{N})$ или бесконечномерный $[0,1]^\infty$ куб с мерой $\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ или $\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ соответственно (λ_k – мера Лебега на $[0,1]$), а также полуось $(0,\infty)$ с мерой Лебега. Во всех случаях, кроме последнего, мы получаем вероятностные пространства, изоморфные между собой. Так, например, в случае $[0,1]$ и $[0,1]^n$ это означает, что существует сохраняющее меру отображение δ, действующее из $[0,1]$ на $[0,1]^n$. Пространство $S(T,\Sigma,\mu)$ в этих случаях будет обозначаться через $S(0,1)$, $S([0,1]^n)$, $S([0,1]^\infty)$ и $S(0,\infty)$ соответственно. Всюду в дальнейшем $\chi_B(t)$ обозначает характеристическую функцию множества B, т. е. $\chi_B(t)=1$, если $t \in B$, и $\chi_B(t)=0$, если $t \notin B$.

Основной объект обзора – последовательности независимых функций, а “арена”, на которой они рассматриваются – симметричные (перестановочно инвариантные) пространства на $[0,1]$ и $(0,\infty)$. Далее нам понадобятся лишь самые элементарные факты из теории вероятностей.

Определение 1. Набор случайных величин (с. в.) $\{f_k\}_{k=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega,\Sigma,\mathsf{P})$, называется *независимым*, если для любых интервалов I_k на прямой $\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k,\ k=1,\dots,n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \in I_k\}.$$

Последовательность с. в. $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ называют *независимой*, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ набор $\{f_k\}_{k=1}^n$ независим.

Напомним также, что с. в. f называется *симметрично распределенной*, если величины f и $-f$ одинаково распределены. Через $\mathscr{F}_f(x)$ в дальнейшем будет обозначаться (традиционная для теории вероятностей) функция распределения, а через $\theta_f(t)$ – характеристическая функция с. в. f, т. е. $\theta_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\mathscr{F}_f(x)$.

Пусть $(\Omega,\Sigma,\mathsf{P})$ – вероятностное пространство, f – интегрируемая с. в., определенная на нем. Если $\mathfrak{R}$ – σ-подалгебра σ-алгебры Σ, то существует и единственна (с точностью до меры нуль) $\mathfrak{R}$-измеримая интегрируемая с. в. $\mathsf{E}_{\mathfrak{R}}f$, которая для всех $B \in \mathfrak{R}$ удовлетворяет равенству

$$\int_B f(\omega)\,d\mathsf{P}(\omega) = \int_B \mathsf{E}_{\mathfrak{R}}f(\omega)\,d\mathsf{P}(\omega) \tag{5}$$

[15; теорема 1.1]. Случайную величину $\mathsf{E}_{\mathfrak{R}}f$ называют *условным математическим ожиданием* f относительно σ-алгебры $\mathfrak{R}$. Кроме того, как обычно, $\mathsf{E}f = \int_\Omega f(\omega)\,d\mathsf{P}(\omega)$.

Понятия и результаты из теории симметричных пространств будут использоваться гораздо интенсивнее. Поэтому мы уделим ей бо́льшее внимание, ограничившись, в основном, пространствами функций, определенных на $[0,1]$ (подробнее см. монографии [16]–[18]).

Пусть $J=[0,1]$ или $(0,\infty)$. Для функции $x=x(t)\in S(J)$, $x\geqslant 0$, введем функцию распределения, принятую в теории функций: $n_x(\tau):=\lambda\{t\in J: x(t)>\tau\}$ $(\tau>0)$. Она неотрицательна, не возрастает и непрерывна справа. Две неотрицательные функции $x,y\in S(J)$ называются *равноизмеримыми*, если $n_x(\tau)=n_y(\tau)$ $(\tau>0)$. В частности, любая функция $x\in S(J)$, $x\geqslant 0$, равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t):=\inf\{\tau\geqslant 0: n_x(\tau)<t\} \qquad (t\in J).$$

Для произвольной $x(t)\in S(J)$ через $x^*(t)$ обозначается перестановка функции $|x(t)|$.

Определение 2. Банахово функциональное пространство $X\subset S(J)$ называется *симметричным*, если: 1) из того, что $x\in X$, $y\in S(J)$ и $|y(t)|\leqslant|x(t)|$ п. в., следует, что $y\in X$ и $\|y\|_X\leqslant\|x\|_X$; 2) из того, что $x\in X$, $y\in S(J)$ и функции $|x(t)|$ и $|y(t)|$ равноизмеримы, следует, что $y\in X$ и $\|y\|_X=\|x\|_X$.

Любое симметричное пространство X на J линейно и непрерывно вложено в отделимое линейное топологическое пространство $S(J)$ [19; теорема 4.3.1]. Это означает, в частности, что из сходимости $\|x_n-x\|_X\to 0$ $(x_n,x\in X)$ следует сходимость $x_n\to x$ по мере λ на множествах конечной меры из J. Если X и Y – банаховы пространства, то запись $X\subset Y$ всюду в дальнейшем означает, что X линейно и непрерывно вложено в Y; тогда, в частности, для некоторой константы $C>0$ и всех $x\in X$ выполнено неравенство $\|x\|_Y\leqslant C\|x\|_X$. Не ограничивая общности, будем всегда предполагать, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X=1$. Тогда, как нетрудно проверить [16; теорема 2.4.1], для произвольного симметричного пространства X на $[0,1]$ выполнено: $L_\infty\subset X\subset L_1$, причем $\|x\|_X\leqslant\|x\|_{L_\infty}$ $(x\in L_\infty)$ и $\|x\|_{L_1}\leqslant\|x\|_X$ $(x\in X)$. В дальнейшем часто будет использоваться следующее утверждение.

Предложение 1 [16; следствие 2.4.2]. *Пусть X – симметричное пространство на J, $x\in X$, $y\in S(J)$. Если для некоторого $C>0$ и всех $\tau>0$ выполнено $n_{|y|}(\tau)\leqslant Cn_{|x|}(\tau)$, то $y\in X$ и $\|y\|_X\leqslant\max\{1,C\}\|x\|_X$.*

Если X – симметричное пространство на J, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство $X^\times$ состоит из всех $y\in S(J)$, для которых

$$\|y\|_{X^\times}=\sup\biggl\{\int_J x(t)y(t)\,dt:\|x\|_X\leqslant 1\biggr\}<\infty.$$

Пространство $X^\times$ также симметрично; оно изометрически вложено в сопряженное X^*; при этом $X^\times=X^*$ тогда и только тогда, когда X сепарабельно. Любое симметричное пространство X непрерывно вложено в свое второе двойственное, которое будет обозначаться через $X^{\times\times}$. Симметричное пространство X называется *максимальным* (имеет *свойство Фату*), если из того, что $x_n\in X$ $(n=1,2,\dots)$, $\sup_{n=1,2,\dots}\|x_n\|_X<\infty$, $x\in S(J)$ и $x_n\to x$ п. в., следует: $x\in X$ и $\|x\|_X\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|_X$. Если симметричное пространство X обладает аналогичным свойством при дополнительном условии $x\in X$, то говорят, что X имеет *порядково полунепрерывную норму.* Последнее эквивалентно тому, что X вложено в $X^{\times\times}$ изометрически [19; теорема 6.1.6]. Пространство X максимально, если и только если его естественное вложение в $X^{\times\times}$ является сюръективной изометрией [19; теорема 6.1.7]. Норма любого максимального или сепарабельного симметричного пространства порядково полунепрерывна.

Приведем примеры симметричных пространств. Во-первых, это пространства L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} |x(t)|, & p = \infty, \end{cases}$$

а также их обобщение – семейство пространств $L_{p,q}$ $(1 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty)$:

$$\|x\|_{p,q} = \begin{cases} \left[\dfrac{q}{p}\int_0^1 \bigl(t^{1/p}x^*(t)\bigr)^q\,\dfrac{dt}{t}\right]^{1/q}, & 1 \leqslant q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} \bigl(t^{1/p}x^*(t)\bigr), & q = \infty, \end{cases}$$

играющих важную роль в теории интерполяции операторов. Хотя функционал $\|x\|_{p,q}$ не субаддитивен, он эквивалентен норме $\|x\|'_{p,q} = \|x^{**}\|_{p,q}$, где $x^{**}(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t x^*(s)\,ds$. Нетрудно проверить [16; лемма 2.6.5], что $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$ $(1 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \infty)$ и $L_{p,p} = L_p$.

Другим естественным обобщением L_p-пространств являются пространства Орлича [20]. Если $M(u)$ – функция Орлича, т.е. возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $M(0) = 0$, то *пространство Орлича* L_M состоит из всех таких $x \in S(0,1)$, что существует $u > 0$, при котором $\displaystyle\int_0^1 M(|x(t)|/u)\,dt \leqslant 1$. В дальнейшем в качестве нормы в этом пространстве мы будем использовать *норму Люксембурга* $\|x\|_{L_M} = \inf u$, где точная нижняя грань берется по всем u, для которых выполнено последнее неравенство. Особый интерес для нас будут представлять так называемые экспоненциальные пространства Орлича. Как легко проверить, каждая из функций

$$N_p(t) := e^{t^p} - \sum_{k=0}^{[1/p]} \frac{t^{kp}}{k!} \quad (0 < p < 1) \quad \text{и} \quad N_p(t) := e^{t^p} - 1 \quad (p \geqslant 1)$$

является функцией Орлича на $[0,\infty)$ (всюду далее $[z]$ – целая часть числа z). Соответствующее пространство Орлича L_{N_p} часто обозначается через $\exp L_p$. Кроме того, положим: $\exp L_\infty := L_\infty$.

Напомним, что неотрицательная функция $\varphi(t)$, определенная на $[0,1]$, называется *квазивогнутой*, если $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t)$ возрастает, а $\varphi(t)/t$ убывает. В частности, всякая неотрицательная возрастающая вогнутая на $[0,1]$ функция $\psi(t)$, $\psi(0) = 0$, квазивогнута [16; гл. 2, § 1, с. 67]. С другой стороны, всякая квазивогнутая функция $\varphi(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\overline{\varphi}(t)$ [16; теорема 2.1.1], точнее, $\overline{\varphi}(t)/2 \leqslant \varphi(t) \leqslant \overline{\varphi}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Важную роль в дальнейшем играет класс Ψ, состоящий из всех квазивогнутых на $[0,1]$ функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям: $\psi(0)=\psi(+0)=0$ и $\psi(1)=1$. Если $\psi\in\Psi$, то пространства Лоренца Λ_ψ и Марцинкевича M_ψ состоят из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x(t)$, для которых соответственно

$$\|x\|_{\Lambda_\psi}:=\int_0^1 x^*(t)\,d\bar\psi(t)<\infty \quad \text{и} \quad \|x\|_{M_\psi}:=\sup_{0<t\leqslant 1}\frac{1}{\psi(t)}\int_0^t x^*(s)\,ds<\infty.$$

Через $X_\circ$ мы будем обозначать *сепарабельную часть* симметричного пространства X, т.е. замыкание L_∞ в X. Заметим, что $X_\circ$ само является симметричным пространством, которое сепарабельно, если только $X\neq L_\infty$ [16; лемма 2.4.4]. В частности, пространство $(M_\psi)_\circ$ может быть охарактеризовано как множество всех таких функций $x\in M_\psi$, что $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{1}{\psi(t)}\displaystyle\int_0^t x^*(s)\,ds=0$. Нетрудно показать, что для каждого симметричного пространства X имеет место равенство $(X^{\times\times})_\circ=X_\circ$.

Пространство Λ_ψ сепарабельно и максимально, $(M_\psi)_\circ$ сепарабельно, но не максимально, напротив, M_ψ максимально, но не сепарабельно. Справедливы также следующие соотношения двойственности: $(\Lambda_\psi)^\times=M_\psi$ и $(M_\psi)^\times=((M_\psi)_\circ)^\times=\Lambda_\psi$ [16; теоремы 2.5.2 и 2.5.4].

Важной характеристикой симметричного пространства X является его *фундаментальная функция* $\phi_X(s):=\|\chi_{(0,s)}\|_X$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$. В частности,

$$\phi_{L_{p,q}}(s)=s^{1/p}\qquad (1\leqslant q\leqslant\infty),$$
$$\phi_{\Lambda_\varphi}(s)=\overline{\varphi}(s)\quad \text{и}\quad \phi_{M_\varphi}(s)=\widetilde{\varphi}(s),\quad \text{где } \widetilde{\varphi}(s)=\frac{s}{\varphi(s)}\,.$$

Для любого симметричного пространства X функция ϕ_X квазивогнута на $[0,1]$ (см. [16; теорема 2.4.7]), и если ϕ – фундаментальная функция симметричного пространства X, то $\Lambda_\phi\subset X\subset M_{\tilde\phi}$ [16; теоремы 2.5.5 и 2.5.7].

В каждом симметричном пространстве X на $[0,1]$ непрерывен *оператор растяжения*

$$\sigma_\tau x(t):=x\left(\frac{t}{\tau}\right)\chi_{[0,\min\{1,\tau\}]}(t)\qquad(\tau>0)$$

и $\|\sigma_\tau\|_{X\to X}\leqslant\max\{1,\tau\}$ [16; теорема 2.4.5]. С его помощью определяются *нижний* и *верхний индексы Бойда* пространства X:

$$\alpha_X:=\lim_{\tau\to 0+}\frac{\ln\|\sigma_\tau\|_{X\to X}}{\ln\tau}\quad \text{и}\quad \beta_X:=\lim_{\tau\to+\infty}\frac{\ln\|\sigma_\tau\|_{X\to X}}{\ln\tau}\,.$$

Из приведенной оценки нормы оператора растяжения следует, что всегда выполнены неравенства $0\leqslant\alpha_X\leqslant\beta_X\leqslant 1$. В частности, $\alpha_{L_{p,q}}=\beta_{L_{p,q}}=1/p$, а индексы Бойда пространств Лоренца и Марцинкевича совпадают с соответствующими показателями растяжения их фундаментальной функции [16; гл. 2, § 4, с. 138].

Далее нам понадобится понятие симметричного пространства случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega,\Sigma,\mathsf{P})$. А именно, если X – симметричное пространство на $[0,1]$, то соответствующее пространство

$X(\Omega) := X(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$ состоит из таких с. в. $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, что $f^* \in X$, и $\|f\|_{X(\Omega)} := \|f^*\|_X$. Здесь, как и ранее,

$$f^*(t) = \inf\bigl\{\tau \geqslant 0 : \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \tau\} < t\bigr\} \qquad (0 < t \leqslant 1).$$

Если пространство $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$ изоморфно отрезку $[0,1]$, рассматриваемому с мерой Лебега, то симметричные пространства $X(\Omega)$ и X мы можем (и будем) отождествлять.

Важную роль в дальнейшем будут играть понятия и методы теории интерполяции операторов. Совокупность $\vec{X} = (X_0, X_1)$ двух банаховых пространств X_0 и X_1 называют *банаховой парой*, если они оба линейно и непрерывно вложены в одно и то же отделимое линейное топологическое пространство. Для банаховой пары (X_0, X_1) можно определить *пересечение* $X_0 \cap X_1$ и *сумму* $X_0 + X_1$ как банаховы пространства с нормами

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\bigl\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\bigr\}$$

и

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf\bigl\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1,\ x_i \in X_i,\ i = 0,1\bigr\}$$

соответственно. Банахову пару образуют, например, любые два симметричных пространства X_0 и X_1 на J, где $J = [0,1]$ или $J = (0,\infty)$, так как $X_i \subset S(J)$ $(i = 0,1)$.

Говорят, что банахово пространство X *интерполяционно* относительно банаховой пары (X_0, X_1) $(X \in \operatorname{Int}(X_0, X_1))$, если $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ и для любого линейного оператора T, ограниченного в X_0 и в X_1, имеем: $T\colon X \to X$. В этом случае по теореме о замкнутом графике найдется такое $C > 0$, что для любого $T\colon X_i \to X_i$ $(i = 0,1)$ выполнено: $\|T\|_{X \to X} \leqslant C \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \to X_i}$. Если в последнем неравенстве можно взять $C = 1$, то пространство X будем называть *интерполяционным с константой* 1. В частности, согласно классической теореме Рисса–Торина [21; теорема 1.1.1] пространство L_p интерполяционно с константой 1 относительно пары (L_{p_0}, L_{p_1}) для любых $1 \leqslant p_0 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty$.

Один из наиболее важных и в теории, и в приложениях способ построения интерполяционных пространств связан с использованием *$\mathscr{K}$-функционала Петре*, определенного на банаховой паре (X_0, X_1) следующим образом:

$$\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\bigl\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\bigr\},$$

где $x \in X_0 + X_1$, а $t > 0$. Нетрудно показать, что если (X_0, X_1) – банахова пара и $x \in X_0 + X_1$ фиксировано, то $\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1)$ – непрерывная неотрицательная возрастающая вогнутая функция относительно переменной $t > 0$ [21; лемма 3.1.1]. Если $X_0 \subset X_1$ и $\|x\|_{X_1} \leqslant \|x\|_{X_0}$ $(x \in X_0)$ (соответственно $X_1 \subset X_0$ и $\|x\|_{X_0} \leqslant \|x\|_{X_1}$ $(x \in X_1)$), то $\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = t\|x\|_{X_1}$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ (соответственно $\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = \|x\|_{X_0}$ при $t \geqslant 1$).

Две неотрицательные функции $f(t)$ и $g(t)$ далее будем называть эквивалентными на множестве T (пишем: $f \asymp g$ $(t \in T)$), если для некоторой константы $C > 0$ и всех $t \in T$ выполнено: $C^{-1} f(t) \leqslant g(t) \leqslant C f(t)$.

В ряде случаев для $\mathscr{K}$-функционала удается найти достаточно простое эквивалентное выражение. В частности, для произвольного пространства с σ-конечной мерой и любого $p \geqslant 1$

$$\mathscr{K}(t,x;L_p,L_\infty) \asymp \left(\int_0^{t^p} (x^*(s))^p\,ds\right)^{1/p} \qquad (t>0),$$

где константы эквивалентности не зависят от $x \in L_p + L_\infty$ и $t>0$ (при $p=1$ эквивалентность можно заменить равенством).

Далее, если F – банахова решетка двусторонних числовых последовательностей, то через $F(u_k)$, $u_k > 0$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, будем обозначать *весовое пространство*, состоящее из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, для которых конечна норма $\|a\|_{F(u_k)} = \|(a_k u_k)\|_F$. Предположим, что $F \supset \ell_\infty \cap \ell_\infty(2^{-k})$. Если (X_0, X_1) – произвольная банахова пара, то *пространство вещественного $\mathscr{K}$-метода* $(X_0,X_1)_F^{\mathscr{K}}$ состоит из всех таких $x \in X_0 + X_1$, что $(\mathscr{K}(2^k, x; X_0, X_1))_k \in F$, с нормой $\|x\| = \|(\mathscr{K}(2^k,x;X_0,X_1))_k\|_F$. Нетрудно проверить, что $(X_0,X_1)_F^{\mathscr{K}}$ интерполяционно относительно пары (X_0,X_1) с константой 1 [22]. В частном случае $F = \ell_p(2^{-k\theta})$ $(0<\theta<1,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$ получаем классические пространства $(X_0,X_1)_{\theta,p}$, свойства которых подробно изложены в монографии [21].

Важность вещественного метода интерполяции связана, в частности, с тем, что для достаточно обширного класса банаховых пар за счет него получаются все интерполяционные пространства. Банахова пара $\vec{X} = (X_0, X_1)$ называется *$\mathscr{K}$-монотонной* (или *парой Кальдерона–Митягина*), если выполнение неравенства

$$\mathscr{K}(t,y;X_0,X_1) \leqslant \mathscr{K}(t,x;X_0,X_1) \qquad (t>0)$$

для некоторых $x \in X_0 + X_1$ и $y \in X_0 + X_1$ влечет существование оператора U, ограниченного в X_0 и в X_1, такого, что $y = Ux$. Ввиду теоремы Брудного–Кругляка, одного из центральных результатов в теории интерполяции [22; теорема 15.1], любое пространство X, интерполяционное относительно $\mathscr{K}$-монотонной пары (X_0,X_1), представимо в виде $X = (X_0,X_1)_F^{\mathscr{K}}$ для некоторой банаховой решетки F.

Второе название $\mathscr{K}$-монотонной пары объясняется тем, что исторически первым результатом в этом направлении явилась теорема о $\mathscr{K}$-монотонности банаховой пары (L_1, L_∞), доказанная независимо и почти одновременно А. П. Кальдероном [23] и Б. С. Митягиным [24]. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что симметричное пространство X на $[0,1]$ интерполяционно относительно этой пары с константой 1. Ввиду теоремы Кальдерона–Митягина это эквивалентно выполнению следующего условия: если $x \in X$, $y \in L_1$ и $y \prec x$, то $y \in X$ и $\|y\|_X \leqslant \|x\|_X$, где через $y \prec x$ обозначается полуупорядоченность Харди–Литтлвуда, означающая, что $\int_0^t y^*(s)\,ds \leqslant \int_0^t x^*(s)\,ds$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Класс таких пространств весьма широк, он содержит все максимальные и сепарабельные пространства, в частности, все пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича. Ввиду [17; теорема 2.a.4] оператор условного математического ожидания $\mathsf{E}_{\mathscr{B}}$, соответствующий σ-подалгебре $\mathscr{B}$ некоторого вероятностного пространства, ограничен в L_1 и в L_∞ с константой 1. Поэтому справедливо следующее утверждение, которое далее будем часто использовать.

Предложение 2. *Всякий оператор условного математического ожидания* $\mathsf{E}_{\mathscr{B}}$ *ограничен в любом симметричном пространстве и имеет норму* 1.

Наконец, для нас будет полезна следующая интерполяционная конструкция, введенная А. П. Кальдероном [25]. Пусть X_0 и X_1 – банаховы решетки измеримых функций, определенных на одном и том же пространстве с мерой $(\mathscr{M}, m)$. Для каждого $\theta \in (0,1)$ пространство $X_0^{1-\theta}X_1^\theta$ состоит из всех таких измеримых функций f на $(\mathscr{M}, m)$, что при некоторых $\lambda > 0$ и $f_i \in X_i$, $\|f_i\|_{X_i} \leqslant 1$ $(i = 0, 1)$, справедливо неравенство

$$|f(x)| \leqslant \lambda |f_0(x)|^{1-\theta}|f_1(x)|^\theta, \qquad x \in \mathscr{M}.$$

Это пространство снабжается нормой, равной точной нижней грани чисел λ, для которых выполнено предыдущее соотношение. Несмотря на то что эта конструкция не является интерполяционным функтором на множестве всех пар банаховых решеток [26], она очень полезна в теории интерполяции. В частности, если (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) – две пары банаховых решеток измеримых функций на пространствах с мерой $(\mathscr{M}, m)$ и $(\mathscr{M}', m')$ соответственно, то любой *положительный* оператор A из $S(\mathscr{M}, m)$ в $S(\mathscr{M}', m')$, который ограничен из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1, ограничен также из пространства $X_0^{1-\theta}X_1^\theta$ в пространство $Y_0^{1-\theta}Y_1^\theta$ и $\|A\|_{X_0^{1-\theta}X_1^\theta \to Y_0^{1-\theta}Y_1^\theta} \leqslant \|A\|_{X_0 \to Y_0}^{1-\theta}\|A\|_{X_1 \to Y_1}^\theta$ для всех $\theta \in (0,1)$ (см., например, [17; предложение 1.d.2(i), с. 43]).

Детальное изложение как приведенных здесь, так и многих других результатов и фактов теории интерполяции можно найти в монографиях [16], [18], [21], [22].

В разделах 6 и 7 мы будем говорить о (квази)банаховых симметричных пространствах последовательностей. Если $\xi = (\xi_n)_{n=1}^\infty$ – ограниченная последовательность вещественных чисел, то $\xi^* = (\xi_n^*)_{n=1}^\infty$ – ее невозрастающая перестановка, т. е. $\xi_n^* = \inf_{\operatorname{card} A = n-1} \sup_{k \in \mathbb{N}\setminus A} |\xi_k|$. Квазибанахово пространство последовательностей E называется *симметричным*, если из условий $a \in E$ и $b^* \leqslant a^*$ следует, что $b \in E$ и $\|b\|_E \leqslant \|a\|_E$. В таком пространстве квазинорма $\|\cdot\|_E$ удовлетворяет обобщенному неравенству треугольника

$$\|a + b\|_E \leqslant L(\|a\|_E + \|b\|_E), \qquad a, b \in E,$$

где $L \geqslant 1$. Если последнее неравенство выполнено в случае $L = 1$, то E называется (*банаховым*) *симметричным пространством последовательностей*. Без ограничения общности всюду будем предполагать, что $\|e_k\|_E = 1$ $(k = 1, 2, \dots)$, где e_k – элементы стандартного базиса в пространствах последовательностей.

3. Оценки L_p-норм сумм независимых функций

В этом разделе мы рассмотрим оценки L_p-норм сумм независимых функций, обобщающие и уточняющие классические неравенства Хинчина и Марцинкевича–Зигмунда. Здесь можно выделить два основных направления. Первое связано с тем, что вместо равномерно ограниченных рассматриваются произвольные системы неотрицательных или симметрично распределенных функций. Суть второго состоит в замене нормы последовательности коэффициентов в пространстве ℓ_2 (или более общо: суммы дисперсий слагаемых) некоторой более "гибкой" величиной, используя которую, можно получить двусторонние оценки с константой, не зависящей от p.

3.1. Неравенства Розенталя. В 1970 г. при изучении дополняемых подпространств пространства $L_p = L_p[0,1]$ Х. П. Розенталь [1] доказал следующие замечательные соотношения, второе из которых можно рассматривать как далеко идущее обобщение неравенств Хинчина. Они показывают, что с точностью до эквивалентности L_p-норма суммы независимых функций определяется L_q-нормами слагаемых. Как мы увидим далее, аналогичное явление, выраженное в терминах "дизъюнктификации", наблюдается также и в общих симметричных пространствах.

Теорема 6 (неравенства Розенталя).

(i) *Если* $1 < p < \infty$, *то для произвольной последовательности* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p$ *неотрицательных независимых функций и каждого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p^p\right)^{1/p}, \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_1\right\} \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_p \leqslant 2^p \max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p^p\right)^{1/p}, \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_1\right\}. \tag{6}$$

(ii) *Если* $p > 2$, *то существует такая константа* $K_p > 0$, *что для произвольной последовательности* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p$ *независимых функций со свойством* $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ *и каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено*:

$$\frac{1}{2}\max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p^p\right)^{1/p}, \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2^2\right)^{1/2}\right\} \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_p \leqslant K_p \max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p^p\right)^{1/p}, \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2^2\right)^{1/2}\right\}. \tag{7}$$

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Если* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p$ *– произвольная последовательность независимых функций, то для каждого* $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_p \leqslant 2^p \max\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p^p\right)^{1/p}, \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_1\right\}.$$

Доказательство. Мы можем (и будем) предполагать, что $f_k \geqslant 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Введем обозначение:

$$N_p := \left(\sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p^p\right)^{1/p}.$$

Ввиду независимости функций f_1 и $f_2+\dots+f_n$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f_1+\dots+f_n)^{p-1} f_1\,dt &\leqslant 2^{p-1}\int_0^1 \bigl(f_1^{p-1}+(f_2+\dots+f_n)^{p-1}\bigr) f_1\,dt \\ &= 2^{p-1}\biggl(\int_0^1 f_1^p\,dt+\int_0^1 (f_2+\dots+f_n)^{p-1}\,dt\int_0^1 f_1\,dt\biggr) \\ &\leqslant 2^{p-1}\biggl(\int_0^1 f_1^p\,dt+\int_0^1 (f_1+\dots+f_n)^{p-1}\,dt\int_0^1 f_1\,dt\biggr).\end{aligned}$$

Точно так же

$$\int_0^1 (f_1+\dots+f_n)^{p-1} f_k\,dt \leqslant 2^{p-1}\biggl(\int_0^1 f_k^p\,dt+\biggl\|\sum_{i=1}^n f_i\biggr\|_{p-1}^{p-1}\int_0^1 f_k\,dt\biggr)$$

для всех $k=1,\dots,n$. Суммируя последние неравенства по k, получим

$$\biggl\|\sum_{k=1}^n f_k\biggr\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\biggl(N_p^p+\biggl\|\sum_{k=1}^n f_k\biggr\|_p^{p-1} N_1\biggr)\leqslant 2^p\max\biggl\{N_p^p, \biggl\|\sum_{k=1}^n f_k\biggr\|_p^{p-1} N_1\biggr\},$$

откуда

$$\biggl\|\sum_{k=1}^n f_k\biggr\|_p \leqslant \max\{2N_p, 2^p N_1\}\leqslant 2^p\max\{N_p, N_1\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $1\leqslant p<\infty$ *и* $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset L_p$ *– произвольная последовательность независимых функций такая, что* $\int_0^1 f_k(t)\,dt=0$ $(k=1,2,\dots)$. *Тогда*:

(a) *если* $\theta_k=\pm1$ $(k=1,2,\dots)$, *то для каждого* $n\in\mathbb{N}$

$$\biggl\|\sum_{k=1}^n \theta_k f_k\biggr\|_p \leqslant 2\biggl\|\sum_{k=1}^n f_k\biggr\|_p;$$

(b) *для каждого* $n\in\mathbb{N}$

$$\biggl\|\sum_{k=1}^n f_k\biggr\|_p \leqslant 2\biggl(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p\biggr)^{1/p}, \quad \text{если } p\leqslant 2,$$

и

$$\biggl\|\sum_{k=1}^n f_k\biggr\|_p \geqslant \frac12\biggl(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p\biggr)^{1/p}, \quad \text{если } p>2.$$

Доказательство. Предположим, что функции f и g независимы и, кроме того, $\mathsf{E}f=0$. Тогда, если E_g – оператор условного математического ожидания относительно σ-алгебры, порожденной функцией g, то выполнены неравенства $\|\mathsf{E}_g\|_{L_p\to L_p}\leqslant 1$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ (см. предложение 2). Кроме того, так как для любого g-измеримого множества B функции f и χ_B независимы, то ввиду равенства (5)

$$\int_B \mathsf{E}_g f\,du = \int_B f\,du = \int_0^1 f\chi_B\,du = \mathsf{E}\,f\cdot\lambda(B) = 0.$$

Поэтому $\mathsf{E}_g f = 0$ и

$$\|g\|_p = \|\mathsf{E}_g\,g\|_p = \|\mathsf{E}_g(f+g)\|_p \leqslant \|f+g\|_p.$$

Для данных $\theta_k = \pm 1\ \ (k=1,\dots,n)$ определим

$$f = \sum_{k:\theta_k=1} f_k \quad \text{и} \quad g = \sum_{k:\theta_k=-1} f_k.$$

Тогда

$$f+g = \sum_{k=1}^n f_k \quad \text{и} \quad f-g = \sum_{k=1}^n \theta_k f_k.$$

По условию f и g независимы и $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt = 0$. Следовательно, ввиду сделанного ранее наблюдения, $\|f\|_p \leqslant \|f+g\|_p$ и $\|g\|_p \leqslant \|f+g\|_p$. Тем самым, $\|f-g\|_p \leqslant 2\|f+g\|_p$, и (a) доказано.

Переходя к доказательству утверждения (b), предположим сначала, что функции $f_k\ \ (k=1,2,\dots)$ симметрично распределены. Тогда функции f_1-f_2 и f_1+f_2 одинаково распределены и, значит, $\|f_1+f_2\|_p^p = (\|f_1+f_2\|_p^p + \|f_1-f_2\|_p^p)/2$. Если $1\leqslant p\leqslant 2$, то $|a+b|^p + |a-b|^p \leqslant 2(|a|^p+|b|^p)$, и поэтому

$$\|f_1+f_2\|_p^p \leqslant \|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p.$$

В случае, когда $p>2$, справедливы противоположные неравенства:

$$|a+b|^p + |a-b|^p \geqslant 2(|a|^p+|b|^p) \quad \text{и} \quad \|f_1+f_2\|_p^p \geqslant \|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p.$$

Тем самым, если функции f_k независимы и симметрично распределены, то для каждого $n\in\mathbb{N}$

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_p \leqslant \bigg(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p\bigg)^{1/p}, \quad \text{если } p\leqslant 2,$$

и

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_p \geqslant \bigg(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p\bigg)^{1/p}, \quad \text{если } p> 2.$$

В общем случае, применяя симметризацию, рассмотрим разности $f_i - f_i'$, где f_i' – независимые копии $f_i\ \ (i=1,2,\dots)$. Они независимы и симметрично распределены. Поэтому, если, например, $1\leqslant p\leqslant 2$, то с помощью рассуждений из начала доказательства, а также неравенства Минковского получаем:

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_p \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^n (f_k-f_k')\Big\|_p \leqslant \bigg(\sum_{k=1}^n \|f_k-f_k'\|_p^p\bigg)^{1/p} \leqslant 2\bigg(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p\bigg)^{1/p}.$$

Случай $p>2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Чтобы получить утверждение (i), достаточно применить лемму 1, а также элементарное неравенство $\|(b_k)\|_p \leqslant \|(b_k)\|_1$ $(p \geqslant 1,\ b_k \in \mathbb{R})$.

При доказательстве (ii) будет использоваться обозначение, введенное в доказательстве леммы 1. Так как f_k независимы, то $\int_0^1 f_i f_j\,dt = \int_0^1 f_i\,dt \int_0^1 f_j\,dt = 0$ $(i \neq j)$, т.е. система $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ ортогональна. Поэтому

$$N_2 = \Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_2,$$

и тогда оценка снизу в (7) следует из леммы 2 (b), а также того, что

$$\Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_2 \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_p.$$

Докажем оценку сверху в (7). По лемме 2 (a) для каждого $u \in [0,1]$ мы имеем

$$\Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_p^p \leqslant 2^p \int_0^1 \Big| \sum_{k=1}^n r_k(u) f_k(t) \Big|^p\,dt,$$

где $r_k(u)$ – функции Радемахера. Интегрируя последнее неравенство по u, меняя порядок интегрирования и применяя неравенства Хинчина (1), получим

$$\Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_p^p \leqslant 2^p B_p^p \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n f_k(t)^2 \Big)^{p/2}\,dt.$$

По условию f_k^2 – неотрицательные независимые функции из $L_{p/2}$. Так как $p/2 > 1$, то по лемме 1

$$\bigg(\int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n f_k(t)^2 \Big)^{p/2}\,dt \bigg)^{2/p} \leqslant 2^{p/2} \max\{N_p^2, N_2^2\}.$$

В итоге оценка сверху в (7) с $K_p = 2^{p/4+1} B_p$ вытекает из двух последних соотношений. Теорема доказана.

3.2. Неравенства Хитченко. Неравенства Хинчина (1) для L_p-норм полиномов Радемахера содержат константы A_p и B_p, зависящие от p, и поэтому, скажем, на основе правой оценки можно лишь утверждать, что с некоторой константой $C = C(a)$

$$\Big\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \Big\|_p \leqslant C\sqrt{p} \quad (p \geqslant 1), \quad \text{если } a = (a_k) \in \ell_2.$$

В 1993 г. П. Хитченко доказал более точное утверждение, которое позволяет в принципе для каждой последовательности коэффициентов $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ определить порядок нормы $\Big\| \sum_{k=1}^\infty a_k r_k \Big\|_p$ при $p \to \infty$ [27]. Центральная роль при этом принадлежит $\mathscr{K}$-функционалу Петре $\kappa_a(t) := \mathscr{K}(t, a; \ell_1, \ell_2)$, соответствующему банаховой паре (ℓ_1, ℓ_2) (см. раздел 2).

Теорема 7. *Существует такая универсальная константа* $\gamma > 0$, *что для всех* $t \geqslant 1$ *и* $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ *выполнены неравенства*

$$\gamma \kappa_a(\sqrt{t}\,) \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k \right\|_t \leqslant \kappa_a(\sqrt{t}\,). \tag{8}$$

Для доказательства нам потребуются некоторые эквивалентные выражения для функционала $\kappa_a(t)$. Прежде всего, мы докажем один из вариантов известного неравенства Хольмстедта (см. [28] или [21; упражнение 5.7.3]).

Предложение 3. *Для любых* $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ *и* $t > 0$ *выполнены неравенства*

$$\frac{1}{4}\left\{ \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t\left(\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right)^{1/2} \right\} \leqslant \kappa_a(t) \leqslant \sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t\left(\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty} (a_i^*)^2 \right)^{1/2}, \tag{9}$$

где $(a_i^*)_{i=1}^{\infty}$ – *невозрастающая перестановка последовательности* $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Докажем сначала функциональный аналог (9): для произвольной функции $f \in L_1(0,\infty) + L_2(0,\infty)$ и любых $t > 0$

$$\frac{1}{4}\left\{ \int_0^{t^2} f^*(s)\,ds + t\left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(s)^2\,ds \right)^{1/2} \right\} \leqslant \mathscr{K}(t, f; L_1, L_2) \leqslant \int_0^{t^2} f^*(s)\,ds + t\left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(s)^2\,ds \right)^{1/2}. \tag{10}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $f = f^*$. Для каждого $t > 0$ определим $f_0 = f\chi_{(0,t^2)}$ и $f_1 = f\chi_{(t^2,\infty)}$. Так как

$$\|f_0\|_{L_1} + t\|f_1\|_{L_2} = \int_0^{t^2} f^*(s)\,ds + t\left(\int_{t^2}^{\infty} f^*(s)^2\,ds \right)^{1/2},$$

то правое неравенство в (10) вытекает из определения $\mathscr{K}$-функционала.

Для доказательства левого неравенства рассмотрим произвольное представление $f = g + h$, где $g \in L_1$, $h \in L_2$. Тогда, ввиду элементарного неравенства для перестановок [16; соотношение (2.23) на с. 93],

$$f(u) \leqslant g^*\left(\frac{u}{2}\right) + h^*\left(\frac{u}{2}\right), \qquad u > 0. \tag{11}$$

Поэтому, применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\|g\|_{L_1} + t\|h\|_{L_2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^{t^2} g^*\left(\frac{u}{2}\right) du + t\left(\int_0^{t^2} \left(h^*\left(\frac{u}{2}\right)\right)^2 du \right)^{1/2} \right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^{t^2} g^*\left(\frac{u}{2}\right) du + \int_0^{t^2} h^*\left(\frac{u}{2}\right) du \right) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{t^2} f^*(u)\,du. \tag{12}$$

Кроме того,

$$t^2\int_{t^2}^{\infty}\Bigl(g^*\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\Bigr)^2\,du \leqslant \int_0^{t^2} g^*\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\,du\int_{t^2}^{\infty} g^*\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\,du \leqslant \Bigl(\int_0^{\infty} g^*\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\,du\Bigr)^2 = 4\|g\|_{L_1}^2,$$

и, значит, ввиду (11)

$$\|g\|_{L_1}+t\|h\|_{L_2} \geqslant \frac{t}{2}\Bigl(\int_{t^2}^{\infty}\Bigl(g^*\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\Bigr)^2\,du\Bigr)^{1/2} + \frac{t}{2}\Bigl(\int_{t^2}^{\infty}\Bigl(h^*\Bigl(\frac{u}{2}\Bigr)\Bigr)^2\,du\Bigr)^{1/2} \geqslant \frac{t}{2}\Bigl(\int_{t^2}^{\infty}(f^*(u))^2\,du\Bigr)^{1/2}.$$

Отсюда и из (12) по определению $\mathscr{K}$-функционала получаем левое неравенство в (10).

Далее, для произвольной последовательности $a=(a_k)_{k=1}^{\infty}\in\ell_2$ определим ступенчатую функцию

$$f_a(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{(k-1,k]}(t) \qquad (t>0). \tag{13}$$

Стандартные рассуждения показывают, что для любых $a=(a_k)_{k=1}^{\infty}\in\ell_2$ и $t>0$ справедливо равенство

$$\mathscr{K}(t,f_a;L_1,L_2)=\kappa_a(t). \tag{14}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству неравенства (9). Прежде всего, если $0<t<1$, то ввиду неравенства $\|a\|_2\leqslant\|a\|_1$ имеем: $\kappa_a(t)=t\|a\|_2$, и (9) очевидно.

Пусть $t\geqslant 1$. Так как пространства ℓ_1 и ℓ_2 симметричны, то можно считать, что $a_k=a_k^*$. Обозначим $b^t=(b_k^t)$, где $b_k^t=a_k$, если $k\leqslant[t^2]$, и $b_k^t=0$, если $k>[t^2]$. Кроме того, пусть $c^t=a-b^t$. Тогда $\kappa_a(t)\leqslant\|b^t\|_1+t\|c^t\|_2$, и тем самым правое неравенство в (9) – прямое следствие определения $\mathscr{K}$-функционала. Что же касается левого, то оно вытекает из соотношений (14) и (10). Действительно, если f_a определяется равенством (13), то

$$\begin{aligned}\kappa_a(t) &\geqslant \kappa_a\bigl(\sqrt{[t^2]}\bigr)=\mathscr{K}\bigl(\sqrt{[t^2]},f_a;L_1,L_2\bigr)\\ &\geqslant \frac{1}{4}\Bigl\{\int_0^{[t^2]} f_a^*(s)\,ds + t\Bigl(\int_{[t^2]}^{\infty} f_a^*(s)^2\,ds\Bigr)^{1/2}\Bigr\}\\ &= \frac{1}{4}\Bigl\{\sum_{i=1}^{[t^2]} a_i^* + t\Bigl(\sum_{i=[t^2]+1}^{\infty}(a_i^*)^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\}.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Далее нам потребуется еще одна аппроксимация функционала $\kappa_a(t)$, полученная в работе [29]. Для произвольных $a=(a_k)_{k=1}^{\infty}\in\ell_2$ и $t\in\mathbb{N}$ определим норму

$$\|a\|_{Q(t)} = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{n\in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \right\}, \tag{15}$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\{A_j\}_{j=1}^t$ натурального ряда $\mathbb{N}$.

Предложение 4. *Если* $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ *и* $t^2 \in \mathbb{N}$, *то*

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leqslant \kappa_a(t) \leqslant \sqrt{2}\,\|a\|_{Q(t^2)}. \tag{16}$$

Доказательство. Прежде всего, из определения $\|\cdot\|_{Q(t)}$ следует, что

$$\|a\|_{Q(t^2)} \leqslant \|a\|_1 \quad \text{и} \quad \|a\|_{Q(t^2)} \leqslant t\|a\|_2.$$

Действительно, первое неравенство очевидно, а для доказательства второго достаточно заметить, что ввиду неравенства Коши–Буняковского для произвольного разбиения $\{A_j\}_{j=1}^{t^2}$ множества натуральных чисел выполнено

$$\sum_{j=1}^{t^2} \left(\sum_{n\in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} \leqslant t\left(\sum_{j=1}^{t^2} \sum_{n\in A_j} a_n^2 \right)^{1/2} = t\|a\|_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\kappa_a(t) &= \inf\{\|b\|_1 + t\|c\|_2 : b + c = a,\ b\in\ell_1,\ c\in\ell_2\}\\ &\geqslant \inf\{\|b\|_{Q(t^2)} + \|c\|_{Q(t^2)} : b + c = a,\ b\in\ell_1,\ c\in\ell_2\} \geqslant \|a\|_{Q(t^2)},\end{aligned}$$

и левое неравенство в (16) доказано.

Докажем противоположное неравенство. С помощью стандартных рассуждений нетрудно показать, что для каждого $t > 0$ сопряженным к пространству $\ell_1 + \ell_2$ с нормой $\kappa_a(t)$ будет пространство $\ell_2 \cap \ell_\infty$ с нормой $\max\{\|a\|_\infty, t^{-1}\|a\|_2\}$. Тем самым по теореме Хана–Банаха

$$\kappa_a(t) = \max\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k : b = (b_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2,\ \max\{\|b\|_\infty,\ t^{-1}\|b\|_2\} \leqslant 1 \right\}. \tag{17}$$

Поэтому существует такая последовательность $b \in \ell_2$, что

$$\kappa_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad \text{и} \quad \max\{\|b\|_\infty, t^{-1}\|b\|_2\} = 1.$$

Выберем $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{t^2} \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$ по индукции следующим образом: если $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_m$ уже найдены, то

$$n_{m+1} = 1 + \max\left\{ k : \sum_{n=n_m+1}^{k} b_n^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Так как $\|b\|_\infty \leqslant 1$, то $\sum_{n=n_m+1}^{n_{m+1}} b_n^2 \leqslant 2$. Из того, что $\|b\|_2 \leqslant t$, следует: $n_{t^2} = \infty$. Таким образом,

$$\kappa_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leqslant \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} b_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m} a_n^2 \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\,\|a\|_{Q(t^2)},$$

и утверждение доказано.

Доказательство теоремы 7. Правое неравенство в (8) – непосредственное следствие определения $\mathscr{K}$-функционала и неравенств Хинчина. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем $b \in \ell_1$ и $c \in \ell_2$ такие, что $\|b\|_1 + \sqrt{t}\,\|c\|_2 \leqslant \kappa_a(\sqrt{t}\,) + \varepsilon$. Тогда, применяя (1) (с учетом оценки для константы), получим

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\Big\|_t \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k r_k\Big\|_t + \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r_k\Big\|_t \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|b_k| + \sqrt{t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\right)^{1/2} \leqslant \kappa_a(\sqrt{t}\,) + \varepsilon.$$

Левое неравенство докажем сначала в случае, когда $t \in \mathbb{N}$. По определению $Q(t)$ выберем попарно дизъюнктные множества $A_1, \dots, A_t$ в множестве натуральных чисел такие, что

$$\|a\|_{Q(t)} \leqslant \frac{3}{2}\bigg\{\sum_{j=1}^{t}\bigg(\sum_{k\in A_j} a_k^2\bigg)^{1/2}\bigg\}. \tag{18}$$

Обозначим $\xi_j = \sum\limits_{k\in A_j} a_k r_k$ $(j = 1, \dots, t)$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k = \sum_{j=1}^{t} \xi_j.$$

Введем множества $B_j = \{t : \xi_j(t) \geqslant \|\xi_j\|_2/2\}$. Так как $\sum\limits_{j=1}^{t}\xi_j \geqslant \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{t}\|\xi_j\|_2$ на множестве $B = \bigcap\limits_{j=1}^{t} B_j$, то

$$\Big\|\sum_{j=1}^{t}\xi_j\Big\|_t \geqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t}\|\xi_j\|_2\lambda(B)^{1/t}. \tag{19}$$

Ввиду независимости и симметричности распределения функций ξ_j, а также неравенства Пэли–Зигмунда в случае функций Радемахера (см., например, [30])

$$\lambda(B) = \prod_{j=1}^{t}\lambda(B_j) = 2^{-t}\prod_{j=1}^{t}\lambda\bigg\{t : \xi_j(t)^2 \geqslant \frac{\|\xi_j\|_2^2}{4}\bigg\} \geqslant 32^{-t}.$$

Поэтому, учитывая неравенства (18) и (19), а также предложение 4, получаем:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\Big\|_t = \Big\|\sum_{j=1}^{t}\xi_j\Big\|_t \geqslant \frac{1}{64}\sum_{j=1}^{t}\|\xi_j\|_2 \geqslant \frac{1}{96}\,\|a\|_{Q(t)} \geqslant \frac{1}{96\sqrt{2}}\,\kappa_a(\sqrt{t}\,).$$

Если $t \geqslant 1$ произвольно, то ввиду вогнутости $\mathscr{K}$-функционала, а также элементарного неравенства $\sqrt{t} \leqslant 2\sqrt{[t]}$ находим, что

$$\frac{1}{192\sqrt{2}}\,\kappa_a(\sqrt{t}\,) \leqslant \frac{1}{96\sqrt{2}}\,\kappa_a\big(\sqrt{[t]}\,\big) \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\Big\|_{[t]} \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\Big\|_t,$$

и теорема 7 доказана.

Пример 1. Применяя неравенства (9) и (8), нетрудно показать, например, что

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k}{k}\Big\|_t \asymp \ln(1+t) \quad \text{и} \quad \Big\|\sum_{k=1}^{n} r_k\Big\|_t \asymp \sqrt{n\min(n,t)} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Из теоремы 7 и предложения 3 вытекает следующее соотношение, существенно уточняющее неравенства Хинчина (1).

Следствие 1. *Существует такая универсальная константа $\gamma' > 0$, что для всех $p \geqslant 1$ и $a = (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ имеют место неравенства*

$$\gamma'\bigg\{\sum_{i\leqslant p} a_i^* + \sqrt{p}\bigg(\sum_{i>p}^{\infty}(a_i^*)^2\bigg)^{1/2}\bigg\} \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\Big\|_p \leqslant \sum_{i\leqslant p} a_i^* + \sqrt{p}\bigg(\sum_{i>p}^{\infty}(a_i^*)^2\bigg)^{1/2}, \tag{20}$$

где $(a_i^*)_{i=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$.

3.3. Теорема Латалы. Оказывается, аналог неравенств Хитченко справедлив и для общих систем независимых функций; только в этом случае $\mathscr{K}$-функционал в паре (ℓ_1,ℓ_2) должен быть заменен на некоторый специальный функционал Орлича. Для точной формулировки этого интересного общего результата, доказанного Р. Латалой [31] в 1997 г., нам понадобятся некоторые определения.

Если $p>0$, то $\phi_p(t) = |1+t|^p$ $(t\in\mathbb{R})$ и $\Phi_p(f) = \mathsf{E}\,\phi_p(f)$ для произвольной с. в. f. Кроме того, если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных (или симметрично распределенных) с. в., то

$$\big|\|(f_k)\|\big|_p := \inf\bigg\{t>0 : \sum_{k=1}^{\infty}\ln\Phi_p\Big(\frac{f_k}{t}\Big) \leqslant p\bigg\}.$$

Теорема 8. (a) *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых неотрицательных с. в. Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$*

$$\frac{e-1}{2e^2}\big|\|(f_k)\|\big|_p \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_p \leqslant e\big|\|(f_k)\|\big|_p, \quad \text{если } p\geqslant 1, \tag{21}$$

и

$$\frac{(e^p-1)^{1/p}}{2e^2}\big|\|(f_k)\|\big|_p \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_p \leqslant e\big|\|(f_k)\|\big|_p, \quad \text{если } 0<p\leqslant 1. \tag{22}$$

(b) *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых симметрично распределенных с. в. Тогда, если $p\geqslant 2$, то для любого $n\in\mathbb{N}$*

$$\frac{e-1}{2e^2}\big|\|(f_k)\|\big|_p \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_p \leqslant e\big|\|(f_k)\|\big|_p. \tag{23}$$

Мы докажем первые два неравенства этой теоремы, относящиеся к случаю неотрицательных с. в. Доказательство неравенства (23) совершенно аналогично, отличаясь лишь чуть большей технической сложностью (см. [31]). Начнем с простых лемм.

Лемма 3. *Если с. в. $f_1, \dots, f_n$ неотрицательны и независимы, то*

$$\Phi_p(f_1 + \dots + f_n) \leqslant \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_n).$$

Доказательство. Ясно, что утверждение достаточно доказать для $n = 2$. Но в этом случае оно вытекает из неравенства $\phi_p(u+v) \leqslant \phi_p(u)\phi_p(v)$ $(u, v \geqslant 0)$.

Лемма 4. *Если с. в. f и g неотрицательны и независимы, то*

$$\Phi_p\bigl(2f + \Phi_p(f)^{2/p} g\bigr) \geqslant \Phi_p(f)\Phi_p(g).$$

Доказательство. Прежде всего, легко показать (возводя в степень $1/p$), что $\phi_p(uv) \geqslant u^{p/2}\phi_p(v)$, если $u \geqslant 1$, $v \geqslant 1$. Поэтому, учитывая неотрицательность f, получим:

$$\mathsf{E}\,\phi_p\bigl(2f + \Phi_p(f)^{2/p} g\bigr)\chi_{\{g \geqslant 1\}} \geqslant \mathsf{E}\,\phi_p\bigl(\Phi_p(f)^{2/p} g\bigr)\chi_{\{g \geqslant 1\}} \geqslant \Phi_p(f)\mathsf{E}\,\phi_p(g)\chi_{\{g \geqslant 1\}}.$$

В то же время, так как $\Phi_p(f) \geqslant 1$, то в случае $0 \leqslant u < 1$, $v \geqslant 0$

$$\phi_p\bigl(2v + \Phi_p(f)^{2/p} u\bigr) \geqslant \phi_p\bigl((1+u)v + u\bigr) = \phi_p(u)\phi_p(v).$$

Следовательно,

$$\mathsf{E}\,\phi_p\bigl(2f + \Phi_p(f)^{2/p} g\bigr)\chi_{\{g < 1\}} \geqslant \Phi_p(f)\mathsf{E}\,\phi_p(g)\chi_{\{g < 1\}},$$

и утверждение леммы вытекает из полученных соотношений.

В заключение докажем утверждение, в определенном смысле обратное к утверждению леммы 3.

Лемма 5. *Пусть $f_1, \dots, f_n$ – неотрицательные независимые с. в., удовлетворяющие условию: $\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_n) \leqslant e^p$. Тогда*

$$\Phi_p\bigl(2e^2(f_1 + \dots + f_n)\bigr) \geqslant \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_n).$$

Доказательство. Положим $g_k := 2\bigl(\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_k)\bigr)^{2/p}(f_1 + \dots + f_k)$. Так как функционал Φ_p – монотонно возрастающий, то ввиду условия леммы достаточно показать, что для всех $k = 1, 2, \dots$ выполнено:

$$\Phi_p(g_k) \geqslant \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_k).$$

Доказательство проведем по индукции. Справедливость неравенства при $k = 1$ следует из очевидной оценки $\Phi_p\bigl(2\Phi_p(f_1)^{2/p} f_1\bigr) \geqslant \Phi_p(f_1)$. Предположим, что оно выполнено для некоторого k. Тогда опять ввиду монотонности Φ_p, а также по предыдущей лемме

$$\begin{aligned}
\Phi_p(g_{k+1}) &\geqslant \Phi_p\bigl\{2\bigl(\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_{k+1})\bigr)^{2/p}(f_1 + \dots + f_k) \\
&\qquad + 2\bigl(\Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_k)\bigr)^{2/p} f_{k+1}\bigr\} \\
&\geqslant \Phi_p\bigl(2f_{k+1} + \Phi_p(f_{k+1})^{2/p} g_k\bigr) \\
&\geqslant \Phi_p(f_{k+1})\Phi_p(g_k) \geqslant \Phi_p(f_1) \cdots \Phi_p(f_{k+1}).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 8. Предположим, что $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \Phi_p(f_k/t) = p$ или, эквивалентно, $\Phi_p(f_1/t) \cdots \Phi_p(f_n/t) = e^p$. Тогда, с одной стороны, по лемме 3

$$\Phi_p\left(\frac{f_1 + \cdots + f_n}{t}\right) \leqslant e^p.$$

Так как $\phi_p(u) \geqslant u^p$, если $u \geqslant 0$, то для произвольной неотрицательной с. в. h выполнено неравенство $\Phi_p(h) \geqslant \|h\|_p^p$. Следовательно, из предыдущего неравенства получаем: $\|f_1 + \cdots + f_n\|_p \leqslant et$, и оценка сверху в (21) и (22) доказана.

С другой стороны, по лемме 5

$$\Phi_p\left(\frac{2e^2(f_1 + \cdots + f_n)}{t}\right) \geqslant e^p. \tag{24}$$

Кроме того, если $p \geqslant 1$, то $\Phi_p(h) \leqslant (1 + \|h\|_p)^p$; если же $p \leqslant 1$, то $\phi_p(u) \leqslant 1 + |u|^p$, и, значит, $\Phi_p(h) \leqslant 1 + \|h\|_p^p$. Из последних соотношений, а также из (24) вытекают оценки снизу как в (21), так и в (22). Тем самым в случае неотрицательных с. в. теорема доказана.

Замечание 1. Применяя стандартную рандомизацию относительно независимой последовательности функций Радемахера, нетрудно показать (подробнее см. [31; замечание 2]), что неравенство (23) выполнено также для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимых с. в. с нулевым математическим ожиданием.

Замечание 2. Соотношения (21), (22) и (23) можно рассматривать как определенный итог предыдущих исследований, связанных с оценками моментов сумм независимых с. в. Прежде всего, в случае $f_k = a_k r_k$, где r_k – функции Радемахера на $[0,1]$, а $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \dots)$, соотношение (23) приводит к неравенствам (20) (правда, с худшими константами).

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть f_k – симметрично распределенная с. в., "хвост" распределения которой логарифмически вогнут, т. е. $\mathsf{P}\{|f_k| \geqslant \tau\} = e^{-N_k(\tau)}$ $(\tau \geqslant 0)$, где функция $N_k \colon [0,\infty) \to [0,\infty]$ выпукла. Обозначим $N_k^*(t) = \sup\{ts - N_k(s) : s > 0\}$. Тогда из соотношения (23) (детали см. в [31]) нетрудно получить следующее обобщение основного результата работы [32]:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k\Big\|_p \asymp \inf\biggl\{t > 0 : \sum_{i \leqslant p} N_i^*\left(\frac{pa_i^*}{t}\right) \leqslant p\biggr\} + \sqrt{p}\,\biggl(\sum_{i>p} (a_i^*)^2\biggr)^{1/2},$$

где $p \geqslant 2$, а последовательность независимых и симметрично распределенных с. в. $\{f_k\}$ нормирована таким образом, что $\inf\bigl\{\tau : \mathsf{P}\{|f_k| \geqslant \tau\} \leqslant e^{-1}\bigr\} = 1$.

В заключение рассмотрим в определенном смысле противоположную ситуацию. Пусть f_k – симметрично распределенная с. в., "хвост" распределения которой является логарифмически выпуклым, т. е. $\mathsf{P}\{|f_k| \geqslant \tau\} = e^{-M_k(\tau)}$ $(\tau \geqslant 0)$, где функция $M_k \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ вогнута. Тогда, применяя (23) (см. [31]), получаем следующее соотношение, ранее доказанное в работе [33]:

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big\|_p \asymp \biggl(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\,|f_k|^p\biggr)^{1/p} + \sqrt{p}\,\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\,f_k^2\biggr)^{1/2} \qquad (p \geqslant 2).$$

4. Оператор Круглова в симметричных пространствах

4.1. Неравенства Розенталя и дизъюнктные суммы. Вернемся к неравенствам Розенталя (6) и (7). Выражения, с которыми в них сравнивается $\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_p$, могут быть представлены несколько иначе. Для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ функций, заданных на $[0,1]$, через $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим произвольную последовательность дизъюнктных функций, заданных уже на полуоси $[0,\infty)$ и таких, что для каждого $k=1,2,\dots$ функции $\mathbf{f}_k$ и f_k одинаково распределены. Например, можно положить $\mathbf{f}_k(t)=f_k(t-k+1)\chi_{[k-1,k)}(t)$ $(t>0)$. Тогда функция $\mathbf{f}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{f}_k$, которую будем называть *дизъюнктной суммой* функций f_k $(k=1,2,\dots)$, очевидно, обладает следующим свойством:

$$\lambda\{t>0:\mathbf{f}(t)>\tau\}=\sum_{k=1}^{n}\lambda\{t\in[0,1]:f_k(t)>\tau\}\qquad(\tau>0),\tag{25}$$

где λ – мера Лебега. Таким образом, неравенства (6) и (7) соответственно означают, что норма $\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_p$ эквивалентна норме $\|\mathbf{f}\|_{L_p\cap L_1[0,\infty)}$, если f_k независимы и неотрицательны, и норме $\|\mathbf{f}\|_{L_p\cap L_2[0,\infty)}$, если эти функции независимы и имеют нулевое математическое ожидание. Здесь, как обычно,

$$\|g\|_{L_p\cap L_q[0,\infty)}=\max\big\{\|g\|_{L_p[0,\infty)},\,\|g\|_{L_q[0,\infty)}\big\}.$$

Иначе говоря, с константами, зависящими лишь от p, последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_p[0,1]$ эквивалентна последовательности $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ либо в пространстве $L_p\cap L_1[0,\infty)$, либо в пространстве $L_p\cap L_2[0,\infty)$ в зависимости от условий, которым удовлетворяют функции f_k.

Приведенная переформулировка неравенств Розенталя приводит к следующему естественному вопросу: для каких функциональных пространств, кроме L_p, справедливы аналогичные неравенства? В 80-е годы прошлого века был опубликован ряд работ, посвященных проблеме сравнения сумм независимых и дизъюнктных функций в различных пространствах, а также применению этих соотношений к изучению геометрии этих пространств. Так, в 1988 г. Н. Каротерс и С. Дилворс [34] перенесли неравенства (7) на пространства Лоренца $L_{p,q}$ $(1\leqslant p<\infty,\ 0<q\leqslant\infty)$ (их определение см. в разделе 2). Заметим, что ввиду равенства (25) именно симметричные пространства являются наиболее вероятными кандидатами на выполнение в них обобщенных неравенств Розенталя.

Вскоре У. Джонсон и Г. Шехтман [35], используя неравенство Хоффмана–Йоргенсона [36], распространили оба неравенства (6) и (7) на случай общих симметричных пространств (заметим в скобках, что еще раньше интересное соотношение типа (6) было доказано для пространств $L_{p,\infty}$ М. Маркусом и Ж. Пизье [37]). Для того чтобы сформулировать их теорему, введем следующую полезную конструкцию (см. [38] или [17; 2.f]). Если X – симметричное пространство на $[0,1]$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то множество Z_X^p состоит из всех измеримых на $(0,\infty)$ функций f, для которых

$$\|f\|_{Z_X^p} := \|f^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|f^*\chi_{[1,\infty)}\|_{L_p[1,\infty)} < \infty.$$

Функционал $\|\cdot\|_{Z_X^p}$ является лишь квазинормой (неравенство треугольника выполняется с константой). Тем не менее, для любого симметричного пространства X он эквивалентен подходящей симметричной норме. Действительно, так как $X \subset L_1[0,1]$, то ввиду известного соотношения (см., например, [28] или [21; упражнение 5.7.3], а также, в случае $p=2$, неравенства (10) при $t=1$)

$$\|f\|_{(L_1+L_p)(0,\infty)} \asymp \int_0^1 f^*(x)\,dx + \left(\int_1^\infty (f^*(x))^p\,dx\right)^{1/p}, \qquad f \in (L_1+L_p)(0,\infty),$$

функционал $\|f\|_{Z_X^p}$ эквивалентен норме $\|f\|'_{Z_X^p} := \|f^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|f\|_{(L_1+L_p)(0,\infty)}$. Тем самым Z_X^p – симметричное пространство на полуоси $[0,\infty)$.

Теорема 9 (Джонсон–Шехтман, [35]). *Пусть X – произвольное симметричное пространство на $[0,1]$. Тогда существует такое $C>0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ $(k=1,2,\dots)$, и любой последовательности неотрицательных независимых функций $\{g_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ выполнено*:

$$\|\mathbf{f}\|_{Z_X^2} \leqslant C\left\|\sum_{k=1}^\infty f_k\right\|_X \quad \text{и} \quad \|\mathbf{g}\|_{Z_X^1} \leqslant C\left\|\sum_{k=1}^\infty g_k\right\|_X, \tag{26}$$

где $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ – дизъюнктные суммы, соответствующие последовательностям $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ соответственно.

Если, кроме того, $X \supset L_p$ при некотором $p<\infty$, то существует такое $C_1 = C_1(p) > 0$, что для последовательностей с такими же свойствами имеют место противоположные неравенства:

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty f_k\right\|_X \leqslant C_1\|\mathbf{f}\|_{Z_X^2}, \tag{27}$$

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty g_k\right\|_X \leqslant C_1\|\mathbf{g}\|_{Z_X^1}. \tag{28}$$

Как мы увидим, условие "удаленности" X от пространства L_∞ из второй части последней теоремы ($X \supset L_p$ при некотором $p<\infty$) не является необходимым для выполнения неравенств (27) и (28). Они справедливы также для некоторых симметричных пространств, расположенных по "другую сторону" от пространств L_p $(p<\infty)$. Это удалось выяснить, используя иной подход, основанный на применении так называемого свойства Круглова.

4.2. Свойство и оператор Круглова: первоначальные сведения. Свойство Круглова было введено М. Ш. Браверманом [39] при изучении сравнения сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах. Название объясняется тем, что оно было инспирировано некоторыми вероятностными конструкциями В. М. Круглова [40], связанными с изучением безгранично делимых распределений и, в частности, с анализом классической формулы Леви–Хинчина. Пусть f – измеримая функция (случайная величина) на $[0,1]$. Через $\pi(f)$ обозначим с. в. $\sum_{i=1}^{N} f_i$, где f_i – независимые копии f, а N – с. в., независимая относительно последовательности $\{f_i\}$, имеющая распределение Пуассона с параметром 1. Иначе говоря, $\pi(f)$ – смесь дискретного распределения вероятностей $p_m = 1/(em!)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, и семейства m-кратных сверток $\mathscr{F}_f^{*m}(x)$ функции распределения $\mathscr{F}_f(x)$ данной с. в. f. В теории вероятностей такое распределение обычно называют *сложным распределением Пуассона* [41; гл. 12]. Непосредственные вычисления показывают, что функция распределения и характеристическая функция с. в. $\pi(f)$ определяются равенствами:

$$\mathscr{F}_{\pi(f)}(x) = \frac{1}{e}\biggl(\chi_{(0,\infty)}(x) + \mathscr{F}_f(x) + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l!}\,\mathscr{F}_f^{*l}(x)\biggr) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{29}$$

и

$$\theta_{\pi(f)}(t) = \exp\biggl(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, d\mathscr{F}_f(x)\biggr) = \exp\bigl(\theta_f(t) - 1\bigr) \qquad (t \in \mathbb{R}), \tag{30}$$

где $\mathscr{F}_f$ и θ_f – соответственно функция распределения и характеристическая функция с. в. f.

В [40] было доказано следующее утверждение.

Теорема 10 (Круглов). *Пусть функция* $\Phi(x)$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$, $\Phi(x) \geqslant 0$ $\Phi(0) = 0$, *а также удовлетворяет одному из следующих условий*:

$$\text{(a) } \Phi(x+y) \leqslant B\Phi(x)\Phi(y) \quad \textit{или} \quad \text{(b) } \Phi(x+y) \leqslant B\bigl(\Phi(x) + \Phi(y)\bigr)$$

для некоторого $B > 0$ *и всех* $x, y \in \mathbb{R}$. *Тогда для произвольной с. в.* f *соотношения* $\mathsf{E}\,\Phi(f) < \infty$ *и* $\mathsf{E}\,\Phi(\pi(f)) < \infty$ *эквивалентны.*

Доказательство. Предположим, например, что выполнено условие (a). Пусть $\mathsf{E}\Phi(f) = \int_0^1 \Phi(f(x))\, dx := A < \infty$, а $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых функций, одинаково распределенных с f. Тогда по условию для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathsf{E}\Phi\biggl(\sum_{k=1}^{n} f_k\biggr) \leqslant B\mathsf{E}\biggl(\Phi\biggl(\sum_{k=1}^{n-1} f_k\biggr)\Phi(f_n)\biggr) = BA\mathsf{E}\Phi\biggl(\sum_{k=1}^{n-1} f_k\biggr) \leqslant \dots \leqslant B^{n-1}A^n.$$

По определению $\pi(f)$ принимает значения, равные $\sum_{k=1}^{n} f_k$ на дизъюнктных множествах E_n, $\lambda(E_n) = 1/(en!)$ $(n = 1, 2, \dots)$, причем наборы $\{f_1, \dots, f_n, \chi_{E_n}\}$ состоят из независимых функций. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\Phi(\pi(f)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\Phi\biggl(\sum_{k=1}^{n} f_k \chi_{E_n}\biggr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\Phi\biggl(\sum_{k=1}^{n} f_k\biggr)\lambda(E_n) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} B^{n-1}A^n \lambda(E_n) = \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^{n-1}A^n}{n!} = \frac{e^{BA} - 1}{eB} < \infty. \end{aligned}$$

Наоборот, из первого равенства в предыдущей цепочке соотношений следует, что

$$\mathsf{E}\Phi(\pi(f)) \geqslant \mathsf{E}\Phi(f_1\chi_{E_1}) = e^{-1}\mathsf{E}\Phi(f_1),$$

откуда ввиду одинаковой распределенности функций f_1 и f получаем неравенство $\mathsf{E}\Phi(f) \leqslant e\mathsf{E}\Phi(\pi(f))$. Теорема доказана.

В частности, если дополнительно Φ – четная выпуклая функция, то мы можем определить пространство Орлича L_Φ на $[0,1]$ (см. раздел 2) и тогда из теоремы 10 следует, что с. в. f и $\pi(f)$ принадлежат или не принадлежат пространству L_Φ одновременно. В связи с этим возникает естественный вопрос: для каких симметричных пространств верно аналогичное утверждение?

Определение 3. Говорят, что симметричное пространство X на $[0,1]$ имеет *свойство Круглова* ($X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует: $\pi(f) \in X$.

Заметим, что противоположная импликация: $\pi(f) \in X \implies f \in X$ выполнена всегда. Действительно, так как ввиду определения $\lambda\{|\pi(f)| \geqslant \tau\} \geqslant e^{-1}\lambda\{|f| \geqslant \tau\}$ ($\tau > 0$), то, применяя предложение 1, получаем, что $\|f\|_X \leqslant e\|\pi(f)\|_X$.

Упрощая ситуацию, можно сказать, что свойством Круглова обладают пространства, достаточно "удаленные" от пространства L_∞ (детальное рассмотрение этого вопроса см. в п. 4.3). Прежде всего, по теореме 10, примененной в случае $\Phi(x) = x^p$, это пространства L_p для всех $1 \leqslant p < \infty$. Более того, аналогичное свойство имеют максимальные симметричные пространства (см. раздел 2), содержащие L_p для некоторого $p < \infty$ [39; теорема 1.2] (и в частности, если нижний индекс Бойда пространства X нетривиален, т. е. $\alpha_X > 0$). В то же время последнее условие не является необходимым; так, экспоненциальное пространство Орлича $\exp L_p$ ($p > 0$) имеет свойство Круглова, если и только если $0 < p \leqslant 1$. Последнее утверждение является следствием теоремы 10, а также рассуждений из начала п. 2.4 монографии [39] (более точные результаты см. далее в п. 4.3.1).

Свойство Круглова оказалось чрезвычайно полезным средством при изучении целого ряда геометрических свойств банаховых пространств измеримых функций, играя, в частности, центральную роль в монографии [39]. Причина в том, что при некотором дополнительном условии на последовательность независимых функций это свойство гарантирует выполнение неравенств вида (27) и (28).

Теорема 11 [39; лемма 1.4]. *Пусть симметричное пространство X имеет свойство Круглова. Тогда для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ такой, что*

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda\{f_k \neq 0\} \leqslant 1, \tag{31}$$

выполнено:

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^\infty f_k\Bigr\|_X \leqslant C\|\mathbf{f}\|_X, \tag{32}$$

где $C > 0$ зависит только от X.

Замечание 3. Так как ввиду (31) $\{\mathbf{f} \neq 0\} \subset [0,1]$, то по сравнению с неравенствами (27) и (28) правая часть обобщенного неравенства Розенталя в этом случае значительно упрощается и при его доказательстве достаточно ограничиться рассмотрением неотрицательных функций.

Важно отметить, что для максимальных симметричных пространств верно и обратное утверждение [39; лемма 1.6]: если для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, удовлетворяющей условию (31), выполнено (32), то $X \in \mathbb{K}$. Эти результаты подсказывают, как могут быть получены необходимые и достаточные условия, при которых в симметричном пространстве X справедливы неравенства (27) и (28). Главная проблема, возникающая при этом, состоит в распространении теоремы 11 на общие последовательности независимых функций (как неотрицательных, так и имеющих нулевое среднее), т. е. в отказе от условия (31). Она была решена авторами настоящего обзора [42], [43] на основе операторного подхода. На пространстве всех п. в. конечных измеримых по Лебегу на $[0,1]$ функций был определен линейный положительный оператор $\mathscr{K}$, тесно связанный со свойством Круглова (и поэтому названный там также оператором Круглова). Введенное понятие, во-первых, позволило использовать многочисленные преимущества операторного языка, например, применять теорию интерполяции операторов. Во-вторых, оказалось возможным рассмотреть более общую ситуацию, когда нормы в левой и правой частях неравенств (27) и (28) берутся в разных пространствах. И наконец, удалось достаточно естественно и просто решить вопрос о точности (по порядку) констант в неравенствах типа Розенталя [44]. В заключение этого пункта приведем детальное изложение этой конструкции, с помощью которой далее будут получены практически окончательные результаты о сравнении сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах.

Определим сначала вспомогательный оператор $\mathscr{K}_1$ со значениями в пространстве $S(\Omega,\mathscr{P})$, где $(\Omega,\mathscr{P}) := \prod_{k=0}^{\infty}([0,1],\lambda_k)$ (λ_k – мера Лебега на $[0,1]$, $k=0,1,\dots$). Пусть $\{E_n\}$ – последовательность попарно дизъюнктных подмножеств отрезка $[0,1]$, $\lambda(E_n)=1/(en!)$ $(n \in \mathbb{N})$. Для произвольной $f \in S([0,1],\lambda)$ положим

$$\mathscr{K}_1 f(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots) := \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)\chi_{E_n}(\omega_0).$$

Хорошо известно, что существует сохраняющее меру отображение $\delta\colon (\Omega,\mathscr{P}) \to ([0,1],\lambda)$. Для каждой $g \in S(\Omega,\mathscr{P})$ определим $R(g)(x) := g(\delta^{-1}x)$, $x \in [0,1]$. Легко видеть, что

$$\lambda\{x \in [0,1] : R(g)(x) < t\} = \mathscr{P}\{\omega \in \Omega : g(\omega) < t\} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Поэтому $\mathscr{K} := R\mathscr{K}_1$ – положительный линейный оператор, действующий в пространстве $S([0,1],\lambda)$, причем для любой измеримой на $[0,1]$ функции f распределения функций $\mathscr{K} f$ и $\mathscr{K}_1 f$ одинаковы.

Так как мы рассматриваем симметричные пространства, то для нас важно лишь распределение функции $\mathscr{K} f$, в связи с чем на определение оператора $\mathscr{K}$ можно смотреть с несколько иной (и зачастую более удобной точки зрения). Если $f \in S([0,1],\lambda)$ и $\{f_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ – последовательность наборов функций, измеримых на $[0,1]$, такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

(i) $f_{n,1},\dots,f_{n,n},\ \chi_{E_n}$ – последовательность независимых с. в.,

(ii) $\mathscr{F}_{f_{n,k}} = \mathscr{F}_f,\ k=1,\dots,n,$

то положим

$$\mathscr{K}' f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{n,k}(x)\chi_{E_n}(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{33}$$

Непосредственная проверка показывает, что с. в. $\mathscr{K} f$ и $\mathscr{K}' f$ одинаково распределены. Поэтому оператор $\mathscr{K}$ можно в определенном смысле отождествлять с $\mathscr{K}'$.

Первый простой результат, относящийся к оператору $\mathscr{K}$, является непосредственным следствием теоремы о замкнутом графике.

Лемма 6. *Если X и Y – такие симметричные пространства на* $[0,1]$, *что $\mathscr{K} f \in Y$ для каждой $f \in X$, то для некоторого $C>0$ выполнено*: $\|\mathscr{K} f\|_Y \leqslant C\|f\|_X$.

Так как для произвольной $f \in S(0,1)$ имеет место равенство $\mathscr{F}_{\mathscr{K}' f}(x) = \mathscr{F}_{\pi(f)}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, то из (30) получаем, что

$$\theta_{\mathscr{K} f}(t) = \theta_{\mathscr{K}' f}(t) = \theta_{\pi(f)}(t) = \exp\bigl(\theta_f(t)-1\bigr) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{34}$$

Последнее замечание, а также определение свойства Круглова приводят к следующему утверждению, которое в дальнейшем будет постоянно использоваться.

Лемма 7. *Если X – произвольное симметричное пространство на* $[0,1]$, *то $X \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в X.*

4.3. Ограниченность оператора Круглова в симметричных пространствах. Как будет доказано в следующем разделе, ограниченность оператора Круглова в симметричном пространстве гарантирует выполнение в нем обобщенных неравенств Розенталя (отчасти это показывают уже теорема 11 и лемма 7). Прежде всего, мы уточним результаты [39] об ограниченности оператора $\mathscr{K}$ в экспоненциальных пространствах Орлича. Кроме того, будут найдены необходимые и достаточные условия его ограниченности в пространствах Лоренца, из которых вытекает ряд интересных следствий. В частности, мы покажем, что ограниченность оператора Круглова – это весьма деликатное свойство, которое нельзя охарактеризовать в терминах вложений так, как, например, справедливость неравенств Хинчина в симметричном пространстве (см. начало раздела 7 или, подробнее, [66]). Естественный, казалось бы, "рубикон" – пространство Орлича $\exp L_1$ – на самом деле, таковым не является:

оператор Круглова может быть ограничен в симметричном пространстве, содержащемся в $\exp L_1$, и не ограничен в симметричном пространстве, содержащем $\exp L_1$.

4.3.1. *Экспоненциальные пространства Орлича.* Действие оператора Круглова в пространствах $\exp L_p$ (определение см. в разделе 2) может быть изучено достаточно полно. Результаты, полученные здесь, будут неоднократно применяться в дальнейшем. Напомним, что $\exp L_\infty := L_\infty$.

Уже ввиду теоремы 10 включение $\exp L_p \in \mathbb{K}$ выполнено при $0 < p \leqslant 1$. Следовательно, по лемме 7 в этом случае оператор Круглова ограничен в пространстве $\exp L_p$. В то же время, если $p > 1$, то пространство $\exp L_p$ не имеет свойства Круглова (см. рассуждения из начала § 2.4 монографии [39]), и оператор $\mathscr{K}$ не действует в нем. Мы уточним здесь последнее утверждение, определив наименьшее симметричное пространство, содержащее образ $\mathscr{K}(\exp L_p)$ для $p > 1$. Для этого нам понадобится еще одно семейство функций Орлича на $[0, \infty)$:

$$M_p(t) := e^{t \ln^{1/p}(e+t)} - 1 \qquad (p > 0).$$

Далее неоднократно будет использоваться тот факт, что для каждого $p > 0$ пространство L_{M_p} (соответственно L_{N_p}) совпадает с пространством Марцинкевича M_{ψ_p} (соответственно M_{φ_p}), где

$$\psi_p(t) := \frac{t\ln(e/t)}{\ln^{1/p}(\ln(e^e/t))} \quad (\text{соответственно } \varphi_p(t) := t\ln^{1/p}(e/t)).$$

Для его доказательства нам потребуются следующие эквивалентные выражения для норм пространств Марцинкевича M_{ψ_p} и M_{φ_p} [16; теорема 2.5.3]:

$$\begin{aligned} \|x\|_{M_{\psi_p}} &\asymp \sup_{t\in(0,1)} \frac{t}{\psi_p(t)}\, x^*(t), \qquad (x \in M_{\psi_p}), \\ \|x\|_{M_{\varphi_p}} &\asymp \sup_{t\in(0,1)} \frac{t}{\varphi_p(t)}\, x^*(t) \qquad (x \in M_{\varphi_p}). \end{aligned} \tag{35}$$

Лемма 8. *Для произвольного $p > 0$ выполнены равенства $L_{M_p} = M_{\psi_p}$ и $(\exp L_p =)$ $L_{N_p} = M_{\varphi_p}$ (с эквивалентностью норм).*

Доказательство. Докажем лишь первое из равенств, так как доказательство второго аналогично (и несколько проще). Пусть $p > 0$. Достаточно показать, что фундаментальные функции $\phi_{L_{M_p}}$ и $\phi_{M_{\psi_p}}$ рассматриваемых пространств эквивалентны, а также что функция $\bar{f}_p(t) := \psi_p(t)/t$ принадлежит пространству Орлича L_{M_p} (см. (35)). Так как ввиду [20] и [16; гл. 2, § 5]

$$\phi_{L_{M_p}}(t) = \frac{1}{M_p^{-1}(1/t)} \quad \text{и} \quad \phi_{M_{\psi_p}}(t) = \frac{\ln^{1/p}(\ln(e^e/t))}{\ln(e/t)} \quad \left(= \frac{1}{\bar{f}_p(t)}\right) \qquad (0 < t \leqslant 1),$$

то для проверки первого из утверждений достаточно показать, что функции $M_p^{-1}(1/t)$ и $\bar{f}_p(t)$ эквивалентны в некоторой окрестности нуля. Легко видеть, что для каждого $c > 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln^{1/p}\big(e + c\ln(e/t)/\ln^{1/p}(\ln(e^e/t))\big)}{\ln^{1/p}(\ln(e^e/t))} = 1.$$

Поэтому можно выбрать такое $\delta > 0$, что для всех $t \in (0,\delta)$

$$M_p\biggl(\frac{1}{2}\,\bar f_p(t)\biggr) \leqslant e^{2\ln(e/t)/3} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant e^{3\ln(e/t)/2} \leqslant M_p(2\bar f_p(t)). \tag{36}$$

Тем самым, функции $M_p^{-1}(1/t)$ и $\bar f_p(t)$ эквивалентны на $(0,\delta)$. Кроме того, из первого неравенства слева в (36) следует: $\bar f_p \in L_{M_p}$. Лемма доказана.

Следующее утверждение показывает важность пространства L_{M_1} в изучении сумм равномерно ограниченных независимых с. в. (см. в связи с этим следствие 3.5.2 в [45]).

Теорема 12. *Пространство L_{M_1} минимально среди таких симметричных пространств Y, что оператор Круглова $\mathscr K$ ограничен из L_∞ в Y.*

Доказательство. Пусть $g := \mathscr K\chi_{[0,1]}$. Из определения оператора $\mathscr K$ (см. также (33)) следует, что

$$g^*(t) = k \qquad (t_k < t < t_{k-1}), \quad \text{где } \ t_k := \frac{1}{e}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{i!} \ \ (k\in\mathbb N) \ \text{ и } \ t_0 = 1.$$

Так как по лемме 8 пространство L_{M_1} совпадает с пространством Марцинкевича M_{ψ_1}, для нормы которого выполнено соотношение (35), то достаточно доказать лишь то, что функции $g^*(t)$ и $\bar f_1(t) = \ln(e/t)/\ln\ln(e^e/t)$ эквивалентны в окрестности нуля. Так как $\bar f_1$ убывает на $(0,1)$, а $g^* \equiv k$ на каждом интервале (t_{k-1},t_k) $(k\in\mathbb N)$, то для этого, в свою очередь, достаточно показать, что

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\bar f_1(t_{k-1})}{k} \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\bar f_1(t_k)}{k} \leqslant 1.$$

Прежде всего, для каждого $k\in\mathbb N$

$$\begin{aligned} k!t_k &= \frac{1}{e}\biggl(1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+i)}\biggr) \\ &\leqslant \frac{1}{e}\biggl(1+\frac{1}{k+1}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(k+i)(k+i+1)}\biggr) \leqslant \frac{1}{e}\biggl(1+\frac{2}{k+1}\biggr) \leqslant \frac{2}{e}\,, \end{aligned}$$

откуда $1/(ek!) \leqslant t_k \leqslant 2/(ek!)$ для всех $k\in\mathbb N$. Так как по формуле Стирлинга $k! \asymp \sqrt{2\pi k}\,k^k e^{-k}$, то тем самым для достаточно больших k справедливо неравенство $k^{-k} \leqslant t_k < t_{k-1} \leqslant (k-1)^{-k/2}$. В итоге элементарные вычисления показывают, что

$$\frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty}\frac{\bar f_1((k-1)^{-k/2})}{k} \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\bar f_1(t_{k-1})}{k} \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\bar f_1(t_k)}{k} \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\bar f_1(k^{-k})}{k} = 1.$$

Теорема доказана.

Результат теоремы 12 распространяется на все значения $p\in(1,\infty)$.

Теорема 13. *Для произвольного $p\in(1,\infty)$ пространство L_{M_q}, где $1/p+1/q=1$, минимально среди таких симметричных пространств Y, что оператор Круглова $\mathscr K$ ограничен из $\exp L_p$ в Y.*

Доказательство. Из теорем 10 и 12, а также леммы 7 следует, что оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из L_∞ в L_{M_1} и ограничен в пространстве $\exp L_1$ $(= L_{N_1})$. Применяя вещественный метод интерполяции (см. раздел 2 или [21; гл. 3]), получим, что

$$\mathscr{K} : (L_\infty, L_{N_1})_{\theta,\infty} \to (L_{M_1}, L_{N_1})_{\theta,\infty} \qquad (0 < \theta < 1).$$

По лемме 8 пространства Орлича L_{N_1} и L_{M_1} совпадают с пространствами Марцинкевича M_{φ_1} и M_{ψ_1} соответственно. Аналогичное свойство имеет и пространство L_∞, а именно, $L_\infty = M_{\mathrm{id}}$, где $\mathrm{id}(t) = t$ $(t \in [0,1])$. Поэтому, согласно известному описанию пространств вида $(M_\varphi, M_\psi)_{\theta,\infty}$ (см. [46; пример 7.1.3]),

$$(L_\infty, L_{N_1})_{\theta,\infty} = L_{N_{\theta^{-1}}}, \qquad (L_{M_1}, L_{N_1})_{\theta,\infty} = L_{M_{(1-\theta)^{-1}}}.$$

Полагая $p = \theta^{-1}$, отсюда сразу заключаем, что $\mathscr{K}$ непрерывен из $\exp L_p = L_{N_p}$ в L_{M_q}. Таким образом, ввиду соотношений (35) доказательство будет закончено, как только мы покажем, что для некоторой константы $C > 0$ (возможно, зависящей от p) и всех достаточно малых $t > 0$ выполнено $h_0(t) \leqslant C(\mathscr{K} g_0)^*(t)$, где $g_0(t) := \ln^{1/p}(e/t)$ и $h_0(t) := \ln(e/t)/\ln^{1/q}(\ln(e^e/t))$. Так как $h_0 = h_0^*$, то последнее неравенство справедливо, если и только если для некоторого $C > 0$ и всех достаточно больших $\tau > 0$ мы имеем

$$\lambda\left\{\mathscr{K} g_0 > \frac{\tau}{C}\right\} \geqslant \lambda\{h_0 > \tau\}.$$

Так как $\lambda\{h_0 > \tau\} \leqslant e^{-\tau \ln^{1/q} \tau}$, а $\lambda\{\mathscr{K} g_0 > \tau/3\} \geqslant e^{-\tau \ln^{1/q} \tau}$, если τ достаточно велико (подробнее см. доказательство теоремы 4.5 в [42]), то теорема доказана.

В заключение приведем одно полезное необходимое условие ограниченности оператора Круглова. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $\ln_n u := \ln \ldots \ln u$ (n раз) и $\Phi_n(u) := \exp\bigl(u \ln_n(c_n + u)\bigr) - 1$, где константа c_n выбрана так, что $\ln_n c_n = 1$. Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 8, нетрудно проверить, что пространство Орлича L_{Φ_n} совпадает с пространством Марцинкевича M_{φ_n}, построенным по функции

$$\varphi_n(u) := \frac{u \ln(e/u)}{\ln_{n+1}(e^{c_n}/u)}, \qquad u \in (0,1].$$

Действуя примерно так же, как в доказательстве теоремы 13, приходим к следующему результату (подробнее см. [42; теорема 7.2]).

Теорема 14. *Если оператор $\mathscr{K}$ ограничен в симметричном пространстве X, то $L_{\Phi_n} \subset X$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

В качестве следствия докажем следующее утверждение, которое далее будет неоднократно использоваться.

Теорема 15. *Предположим, что оператор $\mathscr{K}$ ограничен в симметричном пространстве X. Тогда $\mathscr{K}$ ограничен в $X_\circ$, где $X_\circ$ – сепарабельная часть X (см. раздел 2). При этом $\|\mathscr{K}\|_{X_\circ \to X_\circ} \leqslant \|\mathscr{K}\|_{X \to X}$.*

В частности, если X сепарабельно и оператор $\mathscr{K}$ ограничен во втором двойственном $X^{\times\times}$, то $\mathscr{K}$ ограничен в X и $\|\mathscr{K}\|_{X \to X} \leqslant \|\mathscr{K}\|_{X^{\times\times} \to X^{\times\times}}$.

Доказательство. Поскольку, не ограничивая общности, можно считать, что $X \neq L_\infty$, то $X_\circ$ сепарабельно. Пусть $x \in X_\circ$. Тогда найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L_\infty$, что $\|x_n - x\|_X \to 0$. Так как

$$\|\mathscr{K} x_n - \mathscr{K} x\|_X = \|\mathscr{K}(x_n - x)\|_X \leqslant \|\mathscr{K}\|_{X\to X}\|x_n - x\|_X,$$

то

$$\|\mathscr{K} x_n - \mathscr{K} x\|_X \to 0, \quad \text{если } n \to \infty. \tag{37}$$

С одной стороны, по теореме 12 выполнено $\mathscr{K} x_n \in L_{M_1}$ $(n = 1, 2, \dots)$. С другой стороны, легко проверить, что $L_{M_1} \subset (L_{\Phi_2})_\circ$, а поскольку по теореме 14 $L_{\Phi_2} \subset X$, то $X_\circ \supset (L_{\Phi_2})_\circ \supset L_{M_1}$. Таким образом, $\mathscr{K} x_n \in X_\circ$ $(n = 1, 2, \dots)$, откуда ввиду (37) получаем, что $\mathscr{K} x \in X_\circ$. Так как $X_\circ$ – подпространство X, то $\|\mathscr{K}\|_{X_\circ\to X_\circ} \leqslant \|\mathscr{K}\|_{X\to X}$.

Второе утверждение теоремы – непосредственное следствие первого, так как по условию $X = X_\circ = (X^{\times\times})_\circ$.

4.3.2. *Пространства Лоренца.* Следующая теорема, доказанная в работе [42], полностью характеризует пространства Лоренца (определение см. в разделе 2), в которых ограничен оператор Круглова. Напомним, что Ψ – множество всех квазивогнутых на $[0, 1]$ функций $\psi(t)$, удовлетворяющих условиям: $\psi(0) = \psi(+0) = 0$ и $\psi(1) = 1$.

Теорема 16. *Пусть $\psi \in \Psi$. Оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в пространстве Лоренца Λ_ψ тогда и только тогда, когда для некоторого $C > 0$ выполнено*:

$$\sum_{k=1}^\infty \psi\left(\frac{u^k}{k!}\right) \leqslant C\psi(u) \qquad (0 < u \leqslant 1). \tag{38}$$

Доказательство. Обозначив $f := \chi_{(0,u]}$ $(u \in (0, 1])$, предположим, что последовательности $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $\{\chi_{E_k}\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условиям (i) и (ii) из определения оператора $\mathscr{K}'$ (см. (33)). Тогда функция $f_n := \sum_{k=1}^n f_{n,k}$ имеет биномиальное распределение с параметром u, т. е.

$$\lambda\{f_n = k\} = C_n^k u^k (1-u)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$. Следовательно, $\mathscr{K} f(s) = \sum_{k=1}^\infty k\chi_{A_k}(s)$ и

$$\begin{aligned}\lambda(A_k) &= \sum_{n=k}^\infty C_n^k u^k (1-u)^{n-k} \lambda(E_n) = \frac{1}{e}\sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, u^k (1-u)^{n-k} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{e}\,\frac{u^k}{(1-u)^k k!}\sum_{n=k}^\infty \frac{(1-u)^n}{(n-k)!} = \frac{1}{e}\,\frac{u^k(1-u)^k}{(1-u)^k k!}\sum_{n=0}^\infty \frac{(1-u)^n}{n!} = e^{-u}\frac{u^k}{k!}\,.\end{aligned}$$

Это равенство показывает, что функция $\mathscr{K} f$ имеет распределение Пуассона с параметром u, совпадающее с распределением функции

$$h(s) := \sum_{k=1}^\infty \chi_{(0,\tau_k]}(s), \qquad s \in [0, 1],$$

где $\tau_k := e^{-u}\sum_{i=k}^{\infty} u^i/i!$ $(k \in \mathbb{N})$. Поэтому

$$\|\mathscr{K} f\|_{\Lambda_\psi} = \|h\|_{\Lambda_\psi} = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\tau_k} d\bar{\psi}(s) \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\psi(\tau_k), \tag{39}$$

где $\bar{\psi}$ – наименьшая вогнутая мажоранта функции ψ (см. раздел 2). Так как $\mathscr{K}$ – положительный оператор, ограниченно действующий из Λ_ψ в пространство $S(0,1)$, а крайние точки положительной части единичной сферы пространства Λ_ψ – это нормированные характеристические функции измеримых подмножеств $[0,1]$, то ограниченность $\mathscr{K}$ в Λ_ψ эквивалентна ограниченности этого оператора на множестве всех таких функций (см. следствие 1 леммы 4.5.2 в [16]). Таким образом, из (39) следует, что $\mathscr{K}$ ограничен в Λ_ψ, если и только если для некоторого $C > 0$ выполнено:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(\tau_k) \leqslant C\psi(u) \qquad (0 < u \leqslant 1).$$

Нетрудно показать (см. доказательство теоремы 12), что $e^{-1}u^k/k! \leqslant \tau_k \leqslant 2u^k/k!$ $(k \in \mathbb{N})$. Тем самым, поскольку функция ψ квазивогнута, предыдущее неравенство эквивалентно соотношению (38). Теорема доказана.

Доказательство следующего утверждения аналогично, и поэтому мы его опускаем (см. замечание 5.2 в [42]).

Теорема 17. *Пусть $\psi \in \Psi$. Оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из пространства Лоренца Λ_ψ в пространство Марцинкевича $M_{t/\psi(t)}$ (или, на языке теории интерполяции операторов* [16; гл. 2, § 6], *$\mathscr{K}$ – оператор слабого типа (ψ,ψ)), тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{u\in(0,1],\, k\in\mathbb{N}} \frac{k\psi(u^k/k!)}{\psi(u)} < \infty. \tag{40}$$

Далее мы приведем ряд следствий из теорем 16 и 17. Прежде всего, как уже говорилось, ввиду теоремы 14 возникает естественная гипотеза о том, что $\exp L_1$ (точнее, его сепарабельная часть) – минимальное симметричное пространство, в котором ограничен оператор Круглова. В п. 4.3.3 будет показано, что это не так: мы приведем пример обладающих этим свойством пространств Марцинкевича, более узких, чем $\exp L_1$. Здесь же мы покажем, что, тем не менее, все пространства Лоренца со свойством Круглова лежат "по одну сторону" от пространства $\exp L_1$ [5; теорема 4].

Теорема 18. *Пусть $\psi \in \Psi$. Если $\Lambda_\psi \in \mathbb{K}$, то $\Lambda_\psi \supset \exp L_1$.*

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 9. *Если функция $\psi \in \Psi$ удовлетворяет условию* (38), *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(2^{-k}) \leqslant A\psi(1), \tag{41}$$

где $A > 0$ зависит лишь от константы C из (38).

Доказательство. Ввиду (38), $\sum_{j=1}^{\infty}\psi(2^{-ij}j^{-j})\leqslant C\psi(2^{-i})$ $(i\in\mathbb{N})$, или

$$\sum_{j=1}^{\infty}\psi\bigl(2^{-j(i+[\log_2 j])}\bigr)\leqslant C\psi(2^{-i})\qquad(i\in\mathbb{N}).\tag{42}$$

Прямые оценки показывают, что величина

$$\alpha_n:=\mathrm{card}\{(i,j)\in\mathbb{N}^2: j(i+[\log_2 j])\leqslant n\}$$

удовлетворяет соотношению $\lim_{n\to\infty}n^{-1}\alpha_n=\infty$. Поэтому существует такое $m\in\mathbb{N}$, что для всех $n\geqslant m$ выполнено неравенство $\alpha_n\geqslant(C+1)n$. Так как ψ возрастает, то отсюда и из (42) для произвольного $l>m$ следует:

$$(C+1)\sum_{n=m}^{l}\psi(2^{-n})\leqslant\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\infty}\psi(2^{-j(i+[\log_2 j])})\leqslant C\sum_{i=1}^{l}\psi(2^{-i}),$$

откуда

$$\sum_{n=m}^{l}\psi(2^{-n})\leqslant C\sum_{i=1}^{m-1}\psi(2^{-i}).$$

Неравенство (41) является теперь непосредственным следствием того, что $l>m$ произвольно, а m не зависит от ψ. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 18. Так как по условию $\Lambda_\psi\in\mathbb{K}$, то ввиду теоремы 16 для функции ψ выполнено (38). Применяя лемму 9, получаем (41). Кроме того, ввиду леммы 8 и соотношения (35)

$$\|x\|_{\exp L_1}\asymp\sup_{0<t\leqslant 1}x^*(t)\log_2^{-1}\left(\frac{2}{t}\right),$$

и значит, теорема будет доказана, если показать, что $\log_2(2/t)\in\Lambda_\psi$. Действительно,

$$\begin{aligned}\left\|\log_2\frac{2}{t}\right\|_{\Lambda_\psi}&=\int_0^1\log_2\frac{2}{t}\,d\bar\psi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}}\log_2\frac{2}{t}\,d\bar\psi(t)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\bigl(\bar\psi(2^{-k+1})-\bar\psi(2^{-k})\bigr)\leqslant 4+2\sum_{k=1}^{\infty}\psi(2^{-k})<\infty.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 17 позволяет дать прямое (и достаточно короткое) доказательство того, что при выполнении условия $X\supset L_p$ для некоторого $p<\infty$ сепарабельное или максимальное симметричное пространство X имеет свойство Круглова. В случае максимальных пространств этот результат был известен ранее (см. [39; теорема 1.2]), однако в его доказательстве в [39] используется теорема 9 Джонсона–Шехтмана.

Теорема 19. *Если симметричное пространство X содержит пространство L_p для некоторого $p \in [1,\infty)$, то оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в пространстве $X^{\times\times}$. В частности, если X сепарабельно или максимально, то $\mathscr{K}$ ограничен в X.*

Нам здесь также понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 10 [47; лемма 11]. *Если ψ – возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$ такая, что $\psi(0)=\psi(+0)=0$, $\psi(1)=1$ и $\psi(t)\leqslant at^{1/p}$ для всех $t\in[0,1]$ и некоторых $p,a\in[1,\infty)$, то*

$$\sup_{0<u\leqslant 1}\frac{1}{\psi(u)}\sum_{k=1}^{\infty}\psi\left(\frac{u^k}{k!}\right)\leqslant 5ap.$$

Доказательство теоремы 19. По определению второго ассоциированного пространства

$$X^{\times\times}=\bigcap\Lambda_{\psi_y}\quad \text{и}\quad \|x\|_{X^{\times\times}}=\sup\|x\|_{\Lambda_{\psi_y}}, \tag{43}$$

где пересечение и супремум берутся по всем функциям ψ_y вида

$$\psi_y(t)=\int_0^t y^*(s)\,ds \qquad (0<t\leqslant 1),\quad y\in X^{\times},\quad \|y\|_{X^\times}\leqslant 1.$$

Следуя [47], положим

$$\theta_y(t):=\frac{\psi_y(t)+t}{\|y\|_1+1}\qquad (0<t\leqslant 1),\quad y\in X^{\times},\quad \|y\|_{X^\times}\leqslant 1. \tag{44}$$

Очевидно, что θ_y – возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$ такая, что $\theta_y(0)=\theta_y(+0)=0$ и $\theta_y(1)=1$ для всех $y\in X^\times$. Если $\|y\|_{X^\times}\leqslant 1$, то по двойственности

$$\|y\|_1=\int_0^1|y(t)|\,dt\leqslant \phi_X(1)\|y\|_{X^\times}\leqslant 1,$$

и тогда для каждой $x\in X^{\times\times}$ выполнено неравенство $\|x\|_{\Lambda_{\psi_y}}\leqslant 2\|x\|_{\Lambda_{\theta_y}}$. С другой стороны, ввиду (43) и равенства $\phi_{X^\times}(x)=1/\phi_X(x)$ [16; равенство (2.4.39)]

$$\begin{aligned}\|x\|_{\Lambda_{\theta_y}}&\leqslant\|x\|_{\Lambda_{\psi_y}}+\|x\|_1\leqslant\|x\|_{\Lambda_{\psi_y}}+\phi_{X^\times}(1)\|x\|_{X^{\times\times}}\\&\leqslant\left(1+\frac{1}{\phi_X(1)}\right)\|x\|_{X^{\times\times}}=2\|x\|_{X^{\times\times}}.\end{aligned}$$

Из последних соотношений, а также из (43) следует, что

$$X^{\times\times}=\bigcap\Lambda_{\theta_y},\qquad \|x\|_{X^{\times\times}}\asymp\sup\|x\|_{\lambda_{\theta_y}}, \tag{45}$$

где пересечение и супремум берутся по всем θ_y вида (44).

Далее, так как $L_p\subset X$, то $X^\times\subset L_p^\times=L_q$, где $q=p/(p-1)$. Следовательно, для некоторого $a>0$

$$\theta_y(t)\leqslant\int_0^t y^*(s)\,ds+t\leqslant\|y\|_q t^{1/p}+t\leqslant a\|y\|_{X^\times}t^{1/p}+t\leqslant(a+1)t^{1/p}\qquad(0<t\leqslant 1).$$

Тем самым из леммы 10, теоремы 16 и ее доказательства следует, что оператор $\mathscr{K}$ ограничен в пространстве Лоренца Λ_{θ_y}, если $\|y\|_{X^\times} \leqslant 1$, и, кроме того,

$$\sup_{\|y\|_{X^\times}\leqslant 1} \|\mathscr{K}\|_{\Lambda_{\theta_y}\to\Lambda_{\theta_y}} = C < \infty.$$

Таким образом, ввиду (45) для каждого $x \in X^{\times\times}$ имеем:

$$\|\mathscr{K}x\|_{X^{\times\times}} \asymp \sup_{\|y\|_{X^\times}\leqslant 1} \|\mathscr{K}x\|_{\Lambda_{\theta_y}} \leqslant C \sup_{\|y\|_{X^\times}\leqslant 1} \|x\|_{\Lambda_{\theta_y}} \asymp \|x\|_{X^{\times\times}},$$

и первое утверждение теоремы доказано. Если X максимально, то второе утверждение очевидно, а если X сепарабельно, то нужно применить теорему 15. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, утверждение, обратное к утверждению последней теоремы, неверно: существуют симметричные пространства со свойством Круглова, не содержащие пространств L_p с $p < \infty$. В первую очередь, это экспоненциальные пространства Орлича $\exp L_p$ при $0 < p \leqslant 1$. Операторный подход и теория интерполяции дают достаточно общий метод для получения подобных примеров.

Предложение 5. *Пусть ρ – квазивогнутая функция на $[0,1]$ и $\psi(t) := \rho(t\ln(e/t))$. Если $\tilde{\psi}(t) := t/\psi(t)$ $(0 < t \leqslant 1)$, то пространство Марцинкевича $M_{\tilde{\psi}}$ имеет свойство Круглова.*

Доказательство. Обозначим через $\ell_\infty(1/\rho)$ пространство всех двусторонних последовательностей $a = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ с нормой

$$\|a\|_{l_\infty(1/\rho)} := \left\| \left\{ \frac{a_k}{\rho(2^k)} \right\}_{k=-\infty}^{\infty} \right\|_{\ell_\infty}.$$

Так как ввиду теоремы 10 оператор $\mathscr{K}$ ограничен в L_1 и в L_{N_1}, то он ограничен в пространстве $(L_1, L_{N_1})^K_{\ell_\infty(1/\rho)}$, полученном вещественным методом интерполяции (см. раздел 2). Рассматривая L_1 и L_{N_1} как пространства Марцинкевича и применяя [46; пример 7.1.3] (ср. с доказательством теоремы 13), мы получаем, что $(L_1, L_{N_1})^K_{\ell_\infty(1/\rho)} = M_{\tilde{\psi}}$. Предложение доказано.

Приведем еще одно следствие теоремы 17, которое показывает, что ограниченность оператора Круглова в симметричном пространстве не может быть охарактеризована с помощью вложений. Точнее, не существует такого симметричного пространства X, что этот оператор ограничен в симметричном пространстве Y тогда и только тогда, когда $Y \subseteq X$.

Теорема 20. *Предположим, что функция $\varphi \in \Psi$ такова, что для каждого $\alpha \in (0,1]$ выполнено: $\sup_{t\in(0,1]} t^{-\alpha}\varphi(t) = \infty$. Тогда существует такая $\psi \in \Psi$, $\psi \leqslant \varphi$, что оператор $\mathscr{K}$ не ограничен ни в одном симметричном пространстве X с фундаментальной функцией ψ.*

Начнем с леммы, которая будет использоваться и в дальнейшем.

Лемма 11. *Пусть функция $\varphi \in \Psi$ обладает следующим свойством: для каждой $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \leqslant \varphi$, выполнено условие (40). Тогда существуют $a \geqslant 1$ и $\alpha \in (0,1]$, для которых $\varphi(t) \leqslant at^{\alpha}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.*

Доказательство. Мы используем идею доказательства теоремы 14 из [47]. Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. $\sup_{0<t\leqslant 1} \varphi(t)t^{-1/n} = \infty$ для каждого $n = 1, 2, \dots$. Тогда можно найти такую последовательность $t_n \downarrow 0$, что $t_1 = 1$ и

$$\varphi(t_n) \geqslant \frac{n\varphi(t_{n-1})}{t_{n-1}}\, t_n^{1/n} \qquad (n = 2, 3 \dots).$$

Отсюда

$$\left(\frac{t_{n-1}}{\varphi(t_{n-1})}\, \varphi(t_n)\right)^n \geqslant n^n t_n > n!\, t_n. \tag{46}$$

Если $s_n := t_{n-1}\varphi(t_n)/\varphi(t_{n-1})$, то $t_n < s_n < t_{n-1}$ для всех $n = 2, 3, \dots$. Определим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t_n), & \text{если } t_n \leqslant t \leqslant s_n,\ n = 1, 2, 3, \dots, \\ \dfrac{t\varphi(t_{n-1})}{t_{n-1}}, & \text{если } s_n \leqslant t \leqslant t_{n-1},\ n = 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Функция $\psi(t)$ квазивогнута на $[0,1]$ и $\psi \leqslant \varphi$. Ввиду (46) верны равенства $\psi(s_n^n/n!) = \psi(t_n) = \psi(s_n)$, и поэтому условие (40) для этой функции не выполнено. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 20. По лемме 11 существует функция $\psi \in \Psi$, $\psi \leqslant \varphi$, которая не удовлетворяет условию (40). Тогда по теореме 17 оператор $\mathscr{K}$ не ограничен из пространства Лоренца Λ_ψ в пространство Марцинкевича $M_{t/\psi(t)}$. Так как первое из этих пространств – наименьшее из симметричных пространств с фундаментальной функцией ψ, а второе – наибольшее (см. раздел 2 или [16; теоремы 2.5.5 и 2.5.7]), то отсюда получаем нужное утверждение.

Замечание 4. Непосредственное применение теоремы 20 к пространствам Лоренца показывает, что утверждение, обратное к утверждению теоремы 18, вообще говоря, не верно.

4.3.3. *Пространства Марцинкевича, “близкие” к* $\exp L_1$. Как уже не раз говорилось, пространство Орлича $\exp L_1$, построенное по функции $e^t - 1$, имеет свойство Круглова. По теореме 15 то же самое верно и для его сепарабельной части $(\exp L_1)_\circ$. Заметим, что все рассматривавшиеся до сих пор симметричные пространства X со свойством Круглова содержат последнее пространство. Это верно, например, для всех таких пространств Лоренца (см. теорему 18). Ввиду теоремы 14 возникает, казалось бы, естественная гипотеза о том, что $(\exp L_1)_\circ$ – минимальное симметричное пространство, в котором ограничен оператор Круглова. Тем не менее, в работе [5] эта гипотеза была опровергнута. Более того, там доказано, что для всякого симметричного пространства $X \in \mathbb{K}$ существует пространство Марцинкевича $M_\psi \overset{\neq}{\subset} X$, также обладающее свойством Круглова. Основную роль далее будет играть семейство пространств Марцинкевича, определяемое в следующей теореме.

Теорема 21. *Существует семейство $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{0<\varepsilon<1}$ пространств Марцинкевича, $M_{\psi_\varepsilon} \subseteq M_{\psi_\delta}$ $(0 < \varepsilon \leqslant \delta < 1)$, со следующими свойствами*:

1) $M_{\psi_\varepsilon} \in \mathbb{K},\ 0 < \varepsilon < 1$;
2) *если X симметрично и $X \in \mathbb{K}$, то для всех достаточно малых ε мы имеем*: $M_{\psi_\varepsilon} \subset X$;
3) *функции ψ_ε попарно не эквивалентны, точнее*,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi_\varepsilon(t)}{\psi_\delta(t)} = 0, \quad \text{если } 0 < \varepsilon < \delta < 1; \tag{47}$$

4) $M_{\psi_\varepsilon} \overset{\neq}{\subset} (\exp L_1)_\circ$ *для достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Для доказательства нам потребуется следующее простое утверждение.

Лемма 12. *Если $f \in L_1[0,1]$, то*

$$\lim_{n\to\infty}\lambda(\operatorname{supp}\mathscr{K}^n f) = 0.$$

Доказательство. Так как оператор $\mathscr{K}$ положителен, можно считать, что $f \geqslant 0$ и что $\lambda(\operatorname{supp} f) = 1$. Тогда, если $a_n := \lambda\{t : \mathscr{K}^n f(t) = 0\}$ $(n \in \mathbb{N})$, то по определению оператора $\mathscr{K}$ (см. соотношение (33)) $a_1 = 1/e$ и

$$a_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n^k}{k!} = e^{a_n - 1} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Легко видеть, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает и $a_n \in (0,1)$. Так как $f(x) := e^{x-1} - x$ убывает на $[0,1]$, то функция e^{x-1} имеет на этом отрезке единственную неподвижную точку $x = 1$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, и утверждение доказано.

Доказательство теоремы 21. Рассмотрим функции $h_n := (\mathscr{K}^n\chi_{[0,1]})^*$, $n \geqslant 0$. Так как оператор $\mathscr{K}$ переводит равноизмеримые функции в равноизмеримые, то

$$(\mathscr{K} h_n)^* = h_{n+1}. \tag{48}$$

Далее, по лемме 12 имеем $\lambda(\operatorname{supp} h_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и значит, ряд

$$g_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n h_n \tag{49}$$

сходится всюду на $(0,1]$ для каждого $\varepsilon > 0$, а функция g_ε убывает. Кроме того, из определения оператора $\mathscr{K}$ (см. опять (33)) следует, что $\|\mathscr{K}\|_{L_1\to L_1} = 1$. Поэтому, если $0 < \varepsilon < 1$, то ряд (49) сходится в L_1 и $g_\varepsilon \in L_1$. Покажем теперь, что утверждения теоремы справедливы для семейства $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, где $\psi_\varepsilon(t) = \int_0^t g_\varepsilon(s)\,ds$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

1) Докажем, что оператор $\mathscr{K}$ ограничен в M_{ψ_ε}. Так как крайние точки единичного шара в этом пространстве равноизмеримы с функцией g_ε [48], [49], то для этого достаточно показать, что $\mathscr{K} g_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$. Ввиду ограниченности оператора $\mathscr{K}$ в L_1 имеем:

$$\mathscr{K} g_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathscr{K} h_n \prec \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_{n+1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n = \frac{1}{\varepsilon}\, g_\varepsilon,$$

где первое неравенство вытекает из (48) и хорошо известного свойства полуупорядоченности Харди–Литтлвуда (см. раздел 2 и [16; гл. 2, § 2]). Отсюда следует, что $\mathscr{K} g_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$.

2) Предположим теперь, что $X \in \mathbb{K}$. Тогда, в силу леммы 7 и теоремы 15, $\mathscr{K}\colon X_\circ \to X_\circ$. Поэтому $C = \|\mathscr{K}\|_{X_\circ \to X_\circ} < \infty$, откуда следует, что $\|h_n\|_X \leqslant C^n \|\chi_{[0,1]}\|_X = C^n$. Поэтому для всех $\varepsilon < C^{-1}$ ряд (49) сходится в $X_\circ$ и $g_\varepsilon \in X_\circ$. Кроме того, так как пространство $X_\circ$ сепарабельно, то из $x \in X_\circ$ и $y \prec x$ следует: $y \in X_\circ$ и $\|y\|_{X_\circ} \leqslant \|x\|_{X_\circ}$ (см. раздел 2 или [16; теоремы 2.4.3 и 2.4.10]). Таким образом, вместе с g_ε весь единичный шар пространства Марцинкевича M_{ψ_ε} содержится в $X_\circ$, откуда $M_{\psi_\varepsilon} \subset X_\circ \subset X$.

3) Пусть, как и ранее, функция g_ε определяется соотношением (49) и $0 < \varepsilon < \delta$. Нетрудно проверить (см. доказательство теоремы 7.2 в [42]), что

$$\lim_{t \to 0} \frac{h_{n+1}(t)}{h_n(t)} = \infty.$$

Поэтому для любого $m = 1, 2, \dots$

$$\limsup_{t \to 0} \frac{g_\varepsilon(t)}{g_\delta(t)} = \limsup_{t \to 0} \biggl(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t)\biggr) \biggl(\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n h_n(t)\biggr)^{-1} = \cdots$$
$$= \limsup_{t \to 0} \biggl(\sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t)\biggr) \biggl(\sum_{n=m}^{\infty} \delta^n h_n(t)\biggr)^{-1} \leqslant \biggl(\frac{\varepsilon}{\delta}\biggr)^m.$$

Тем самым $\lim_{t \to 0} g_\varepsilon(t)/g_\delta(t) = 0$, откуда следует (47).

4) Как уже говорилось, $\mathscr{K}$ ограниченно действует в пространстве $(\exp L_1)_\circ$. Поэтому достаточно применить уже доказанные утверждения 2) и 3).

Следствие 2. *Для любого симметричного пространства $X \in \mathbb{K}$ существует такое симметричное пространство $Y \in \mathbb{K}$, что $Y \overset{\neq}{\subset} X$.*

5. Сравнение сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах

Следующая теорема является уточнением теоремы 1 из [44] (см. также [42; теоремы 3.5 и 6.1]). Ее часть (ii) усиливает и дополняет неравенство Джонсона–Шехтмана (28), в то время как часть (i) показывает практически окончательный характер этого усиления. Через $\mathbf{f}$ всюду далее по-прежнему обозначается дизъюнктная сумма, соответствующая последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, а через L_{M_p} – пространство Орлича, построенное по функции $M_p(t) := e^{t \ln^{1/p}(e+t)} - 1$ $(p > 0)$.

Теорема 22. *Пусть X и Y – такие симметричные пространства на* $[0,1]$, *что* $X \subseteq Y$.

(i) *Предположим, что неравенство*

$$\Bigl\| \sum_{i=1}^{n} f_i \Bigr\|_Y \leqslant C \|\mathbf{f}\|_{Z_X^1} \quad (= C\|\mathbf{f}\|_X) \tag{50}$$

справедливо для некоторого $C>0$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$, удовлетворяющей условию (31). *Тогда оператор Круглова $\mathscr{K}$ ограничен из X в $Y^{\times\times}$ и $\|\mathscr{K}\|_{X\to Y^{\times\times}} \leqslant C$.*

(ii) *Если оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из X в Y, то для каждой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено*:

$$\Bigl\| \sum_{i=1}^{n} f_i \Bigr\|_Y \leqslant 8 \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \|\mathbf{f}\|_{Z_X^1}. \tag{51}$$

В доказательстве части (i) используется одно свойство слабой сходимости распределений. Напомним, что одно из эквивалентных условий слабой сходимости с. в. f_n к с. в. f состоит в поточечной сходимости соответствующих характеристических функций: $\theta_{f_n}(t) \to \theta_f(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [50]).

Лемма 13 [39; предложение 5]. *Пусть X – максимальное симметричное пространство на $[0,1]$ и $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Если f_n слабо сходятся к f и*

$$\sup_{n=1,2,\dots} \|f_n\|_X = C < \infty,$$

то $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant C$.

В доказательстве части (ii) нам понадобится аналог известного неравенства Прохорова [51] для неотрицательных функций. Пусть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ состоит из независимых функций, определенных на $[0,1]$. Обозначим через $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ такую последовательность независимых функций, что $\mathscr{F}_{h_k}(x) = \mathscr{F}_{\mathscr{K} f_k}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ при всех $k = 1,2,\dots$.

Лемма 14. *Если f_k независимы и неотрицательны, то для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$\lambda\biggl\{ \sum_{k=1}^{n} f_k \geqslant x \biggr\} \leqslant 2\lambda\biggl\{ \sum_{k=1}^{n} h_k \geqslant \frac{x}{2} \biggr\} \qquad (x>0). \tag{52}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что f_i определены на пространстве $\prod_{i=1}^{n}([0,1],\lambda_i)$, причем $f_i(t_1,\dots,t_n) = f_i(t_i)$ $(i = 1,\dots,n)$. Так как $f_i \geqslant 0$, то из определения оператора Круглова следует, что $\mathscr{K} f_i \geqslant g_i$ для некоторой с. в. g_i, одинаково распределенной с функцией $\sigma_{1/2} f_i$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathscr{K} f_i(t_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} g_i(t_i). \tag{53}$$

С другой стороны, ясно, что для каждого $i = 1, \dots, n$ функция f_i одинаково распределена с суммой $g_i + g_i'$, где g_i и g_i' дизъюнктны и одинаково распределены. Поэтому, если $\lambda^n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, то ввиду независимости и соотношения (53) для каждого $x > 0$

$$\lambda^n\Big\{\sum_{i=1}^n f_i(t_i) > x\Big\} = \lambda^n\Big\{\sum_{i=1}^n \big(g_i(t_i) + g_i'(t_i)\big) > x\Big\}$$
$$\leqslant 2\lambda^n\Big\{\sum_{i=1}^n g_i(t_i) > \frac{x}{2}\Big\} \leqslant 2\lambda^n\Big\{\sum_{i=1}^n \mathscr{K} f_i(t_i) > \frac{x}{2}\Big\}.$$

Поскольку $\mathscr{K} f_i$ и h_i одинаково распределены, а h_i независимы, то (52) доказано.

Доказательство теоремы 22. (i) Мы следуем идее доказательства леммы 1.6 из [39]. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для произвольной $f \in X$ выберем одинаково распределенную с ней функцию $h \in X$ так, что h и $\chi_{[0,1/n]}$ независимы. Тогда, как легко проверить, функция $h_n := h\chi_{[0,1/n]}$ будет одинаково распределена с функцией $\sigma_{1/n} f$. Рассмотрим набор $\{\chi_{[0,1/n]}, h_{n,k}\}_{k=1}^n$, состоящий из независимых функций, где $\mathscr{F}_{h_{n,k}}(x) = \mathscr{F}_{h_n}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Так как функции $\left|\sum_{k=1}^n \mathbf{h}_{n,k}\right|$ и $|h|$ имеют одну и ту же функцию распределения, то аналогичное свойство имеют и функции $\left|\sum_{k=1}^n \mathbf{h}_{n,k}\right|$ и $|f|$. Кроме того, набор $\{h_{n,k}\}_{k=1}^n$ удовлетворяет неравенству (31). Следовательно, по условию теоремы

$$\Big\|\sum_{k=1}^n h_{n,k}\Big\|_Y \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^n \mathbf{h}_{n,k}\Big\|_X = C\|f\|_X. \tag{54}$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\theta_{h_n}(t) = n^{-1}\theta_f(t) + (1 - n^{-1})$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому характеристическая функция суммы $H_n := \sum_{k=1}^n h_{n,k}$ определяется равенством

$$\theta_{H_n}(t) = \big(n^{-1}(\theta_f(t) - 1) + 1\big)^n \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \theta_{H_n}(t) = \exp(\theta_f(t) - 1) = \theta_{\mathscr{K} f}(t)$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, то H_n сходится слабо к $\mathscr{K} f$. Тем самым, из соотношения (54), максимальности $Y^{\times\times}$ и леммы 13 следует, что $\|\mathscr{K} f\|_{Y^{\times\times}} \leqslant C\|f\|_X$.

(ii) Прежде всего, ясно, что достаточно рассматривать лишь неотрицательные функции. Предположим сначала, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ состоит из неотрицательных независимых функций, удовлетворяющих условию (31). Пусть по-прежнему h_k независимы и $\mathscr{F}_{h_k}(x) = \mathscr{F}_{\mathscr{K} f_k}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда по лемме 14 имеем (52), и, значит, ввиду предложения 1

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_Y \leqslant 4\Big\|\sum_{k=1}^n h_k\Big\|_Y. \tag{55}$$

Так как функции $\mathbf{f}_k$ $(k=1,\dots,n)$ попарно дизъюнктны, то, учитывая определение дизъюнктной суммы, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)\,d\mathscr{F}_{\mathbf{f}}(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itx}-1)\,d\mathscr{F}_{f_k}(x),$$

откуда

$$\theta_{\mathscr{K}\mathbf{f}}(t)=\prod_{k=1}^{n}\theta_{\mathscr{K}f_k}(t)=\prod_{k=1}^{n}\theta_{h_k}(t)=\theta_{\sum_{k=1}^{n}h_k}(t)\qquad(t\in\mathbb{R}).$$

Таким образом, функции $\sum_{k=1}^{n}h_k$ и $\mathscr{K}\mathbf{f}$ одинаково распределены. Следовательно, ввиду (55)

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_k\Big\|_Y\leqslant 4\Big\|\sum_{k=1}^{n}h_k\Big\|_Y=4\|\mathscr{K}\mathbf{f}\|_Y\leqslant 4\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}\|\mathbf{f}\|_X,$$

и в рассматриваемом случае неравенство (51) доказано.

Пусть теперь $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$ – произвольная последовательность неотрицательных независимых функций. Без ограничения общности мы можем (и будем) предполагать, что $\lambda\{f_i=\tau\}=0$ для каждого $\tau\geqslant 0$ и всех $i=1,\dots,n$. Тогда существуют такие $0=t_n<t_{n-1}<\dots<t_1<t_0=\infty$, что

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda\{t_j\leqslant f_i<t_{j-1}\}=1\qquad(j=1,\dots,n).$$

Заметим, что для последовательности $\{f_i\chi_{\{f_i>t_1\}}\}_{i=1}^{n}$ выполнено условие (31). Поэтому, как уже доказано,

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n}f_i\chi_{\{f_i>t_1\}}\Big\|_Y\leqslant 4\|\mathscr{K}\|\,\Big\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\chi_{\{\mathbf{f}_i>t_1\}}\Big\|_X=4\|\mathscr{K}\|\,\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\Big)^{*}\chi_{[0,1]}\Big\|_X.\tag{56}$$

Каждая из последовательностей $\big\{f_i\chi_{\{t_j<f_i<t_{j-1}\}}\big\}_{i=1}^{n}$ $(j=2,\dots,n)$ также удовлетворяет условию (31). Тем самым, ввиду того, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X=1$, получим

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^{n}f_i\chi_{\{f_i<t_1\}}\Big\|_Y&\leqslant\sum_{j=2}^{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n}f_i\chi_{\{t_j<f_i<t_{j-1}\}}\Big\|_Y\leqslant 4\|\mathscr{K}\|\sum_{j=2}^{n}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\chi_{\{t_j<\mathbf{f}_i<t_{j-1}\}}\Big\|_X\\&\leqslant 4\|\mathscr{K}\|\sum_{j=2}^{n}t_{j-1}\leqslant 4\|\mathscr{K}\|\bigg(\Big\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\chi_{\{\mathbf{f}_i>t_1\}}\Big\|_X+\sum_{j=2}^{n-1}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\chi_{\{t_j<\mathbf{f}_i<t_{j-1}\}}\Big\|_1\bigg)\\&=4\|\mathscr{K}\|\bigg(\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\Big)^{*}\chi_{[0,1]}\Big\|_X+\sum_{j=2}^{n-1}\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\Big)^{*}\chi_{[j-1,j]}\Big\|_1\bigg)=4\|\mathscr{K}\|\,\Big\|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\Big\|_{Z_X^1}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (56) следует (51), и теорема доказана.

Разумеется, если пространство Y максимально, то утверждение части (i) последней теоремы приобретает следующий вид: оператор $\mathscr{K}$ ограничен из X в Y и $\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}\leqslant C$. Это утверждение может быть распространено на случай, когда $X=Y$ сепарабельно. Тем самым мы получаем частичный положительный ответ на вопрос, заданный в [39; § 1.6, с. 16].

Теорема 23. *Предположим, что X – такое сепарабельное симметричное пространство на* $[0,1]$, *что неравенство*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} f_i\Big\|_X \leqslant C\|\mathbf{f}\|_{Z_X^1} \quad (= C\|\mathbf{f}\|_X) \tag{57}$$

справедливо для некоторого $C>0$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$, удовлетворяющей условию (31). *Тогда оператор $\mathscr{K}$ ограничен в X и $\|\mathscr{K}\|_{X\to X}\leqslant C$.*

Доказательство. Стандартные рассуждения, основанные на использовании максимальности пространства $X^{\times\times}$, а также перехода к срезкам рассматриваемых функций, приводят к распространению неравенства (57) на последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X^{\times\times}$. Поэтому по теореме 22 оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в $X^{\times\times}$ и $\|\mathscr{K}\|_{X^{\times\times}\to X^{\times\times}}\leqslant C$. Применяя теорему 15, получаем утверждение.

Замечание 5. Однако, если $X\neq Y$, то утверждение (i) теоремы 22 не может быть усилено подобным образом даже в случае сепарабельного Y. Достаточно рассмотреть следующий случай: $X=L_\infty$ и $Y=(L_{M_1})_\circ$.

Из теоремы 22, а также результатов об ограниченности оператора Круглова в симметричных пространствах, полученных в предыдущем разделе, вытекает целый ряд следствий о справедливости неравенства (51) в конкретных пространствах. Приведем здесь лишь одно из них. Пусть $p\in(1,\infty]$ и $q=p/(p-1)$. Так как $(L_{M_q})_\circ$ – наименьшее среди всех симметричных пространств Y со свойством $Y^{\times\times}\supseteq L_{M_q}$, а $\exp L_p\subset(L_{M_q})_\circ$, то из теорем 22, 12 и 13 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Для произвольного $p\in(1,\infty]$ существует такая константа $C_p>0$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{n}\subset\exp L_p$ выполнено:*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_{(L_{M_q})_\circ} \leqslant C_p\|\mathbf{f}\|_{Z^1_{\exp L_p}}.$$

Кроме того, если симметричное пространство Y обладает тем свойством, что для некоторого $C>0$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{n}\subset\exp L_p$, удовлетворяющей условию (31), *выполнено неравенство*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big\|_Y \leqslant C\|\mathbf{f}\|_{\exp L_p},$$

то $(L_{M_q})_\circ\subseteq Y$.

Следующий результат, доказанный в [42], является в определенном смысле обращением второго из утверждений теоремы 9 Джонсона–Шехтмана.

Теорема 24. *Предположим, что симметричное пространство X имеет следующее свойство: для каждого максимального симметричного пространства $Y \supset X$ существует такая константа $C > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset Y$, удовлетворяющей условию (31), выполнено неравенство*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n f_i \Big\|_Y \leqslant C \|\mathbf{f}\|_Y,$$

где $\mathbf{f}$ *– дизъюнктная сумма последовательности* $\{f_k\}_{k=1}^n$. *Тогда* $X \supset L_p$ *при некотором* $p < \infty$.

Доказательство. Согласно теореме 2.5.7 из [16], $X \subseteq M_{t/\phi_X}$, где ϕ_X – фундаментальная функция пространства X. Следовательно, для каждой функции $\psi \in \Psi$ такой, что $\psi \leqslant \phi_X$, имеем: $X \subseteq M_{t/\psi(t)}$. Тем самым по условию и теореме 22, (i) оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в пространстве $M_{t/\psi(t)}$. Но тогда ввиду теоремы 17 условие (40) выполнено для каждой такой функции ψ. Применяя лемму 11, получаем, что $\phi_X(t) \leqslant at^\alpha$ при некоторых $a \geqslant 1$ и $\alpha \in (0,1]$ и для всех $t \in [0,1]$. Последнее неравенство вместе с теоремой 2.5.5 из [16] гарантирует, что

$$X \supseteq \Lambda_{\phi_X} \supseteq \Lambda_{t^\alpha}.$$

Так как пространство Лоренца Λ_{t^α} содержит L_p, если $p > 1/\alpha$, то теорема доказана.

Замечание 6. Из доказательства ясно, что последнее утверждение останется верным, если в его формулировке класс всех максимальных симметричных пространств заменить множеством пространств Марцинкевича.

Перейдем теперь к рассмотрению случая независимых функций, в среднем равных нулю. Первоначальный вариант следующей теоремы, усиливающей неравенство Джонсона–Шехтмана (27), был доказан в работе [52] с использованием техники теории безгранично делимых распределений. Здесь доказательство значительно упрощено [53].

Теорема 25. *Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0,1]$, $X \subset Y$. Тогда, если оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из X в Y, то существует такая универсальная константа $\alpha > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, и всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\Big\| \sum_{k=1}^n f_k \Big\|_Y \leqslant \alpha \|\mathscr{K}\|_{X \to Y} \|\mathbf{f}\|_{Z_X^2}. \tag{58}$$

Отметим ту ключевую роль, которую играет в доказательстве этой теоремы неравенство Прохорова из теоремы 5. Далее нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Предложение 6. *Существует такая универсальная константа $\beta > 0$, что для любой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ ограниченных симметрично распределенных независимых функций выполнено*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_{L_{M_1}} \leqslant \beta\|\mathbf{f}\|_{L_2\cap L_\infty} \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Доказательство. Рассмотрим следующее подпространство пространства $L_2\cap L_\infty(0,\infty)$:

$$(L_2\cap L_\infty)_{\mathrm{s}} := \{f\in L_2\cap L_\infty : \text{с. в. } f^{(k)}(x) := f(x+k-1)\ (0\leqslant x\leqslant 1) \\ \text{симметрично распределена для каждого } k\geqslant 1\}.$$

Нетрудно проверить, что $(L_2\cap L_\infty)_{\mathrm{s}}$ замкнуто в $L_2\cap L_\infty$ и, следовательно, является банаховым пространством. Определим последовательность линейных операторов

$$U_n : (L_2\cap L_\infty)_{\mathrm{s}} \to L_{M_1}(\Omega,\mathscr{P}), \qquad U_n f(t_1,\dots,t_n,\dots) = \sum_{k=1}^n f(k-1+t_k),$$

где, как обычно, $(\Omega,\mathscr{P}) = \prod_{k=1}^\infty([0,1],\lambda_k)$. Очевидно, что $\|U_n\|_{(L_2\cap L_\infty)_{\mathrm{s}}\to L_{M_1}} \leqslant n$. Пусть $\mathbf{f}_k$ – дизъюнктные копии функций $f(k-1+t_k)$ $(k=1,2,\dots)$, а $\mathbf{f}^{(n)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k$ – дизъюнктная сумма первых n функций. Так как функции $f(k-1+t_k)$ симметрично распределены, то по теореме 5

$$\mathscr{P}\biggl\{\sum_{k=1}^n f(k-1+t_k) > \tau\biggr\} \leqslant \exp\biggl(-\frac{\tau}{2\|\mathbf{f}^{(n)}\|_\infty}\ \operatorname{arcsh}\frac{\tau\|\mathbf{f}^{(n)}\|_\infty}{2\|\mathbf{f}^{(n)}\|_2^2}\biggr) \quad (\tau>0). \tag{59}$$

Напомним, что функция $\bar f_1(t) := \ln(e/t)/\ln(\ln(e^e/t))$ “максимальна по перестановке” в пространстве L_{M_1} (см. первое из соотношений (35) и лемму 8). Кроме того, как нетрудно проверить, для некоторого $C\geqslant 1$ и всех достаточно больших $\tau>0$ выполнены неравенства

$$e^{-C^{-1}\tau\ln\tau} \leqslant \lambda\{t\in(0,1] : \bar f_1(t) > \tau\} \leqslant e^{-\tau\ln\tau}.$$

Предположим, что $f\in(L_2\cap L_\infty)_{\mathrm{s}}$, $\|f\|_{L_2\cap L_\infty} = 1$ и $n_0\in\mathbb{N}$ таково, что $f\chi_{(0,n_0]}\neq 0$. Легко видеть, что правая часть в (59) не превосходит

$$\exp\biggl(-\frac{\tau}{2}\operatorname{arcsh}\frac{\tau\|f\chi_{(0,n_0]}\|_\infty}{2}\biggr)$$

для всех $n\geqslant n_0$ и $\tau>0$. Поэтому, так как $\operatorname{arcsh} t\sim\ln t$ при $t\to+\infty$, то мы получаем, что $\sup_{n=1,2,\dots}\|U_n f\|_{L_{M_1}} < \infty$ для каждой фиксированной $f\in(L_2\cap L_\infty)_{\mathrm{s}}$. Но тогда ввиду принципа Банаха–Штейнгауза нормы $\|U_n\|_{(L_2\cap L_\infty)_{\mathrm{s}}\to L_{M_1}}$ $(n\in\mathbb{N})$ равномерно ограничены, и утверждение доказано.

Лемма 15. *Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0,1]$ и $\mathscr{K}: X \to Y$. Тогда $L_{M_1} \subset Y$ и, кроме того, существует такая универсальная константа $\gamma > 0$, что для всех $x \in L_{M_1}$ имеет место неравенство*

$$\|x\|_Y \leqslant \gamma \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \|x\|_{L_{M_1}}.$$

Доказательство. Если функция $\bar{f}_1$ – та же, что и в доказательстве предыдущего утверждения, то, как там отмечалось, для произвольной $x \in L_{M_1}$ и для всех $0 < t \leqslant 1$ неравенство $x^*(t) \leqslant \gamma \bar{f}_1(t) \|x\|_{L_{M_1}}$ выполнено с некоторой универсальной константой $\gamma > 0$. Кроме того, $\bar{f}_1 \leqslant \mathscr{K}\chi_{[0,1]}$ (см. доказательство теоремы 12), и, значит,

$$\|\bar{f}_1\|_Y \leqslant \|\mathscr{K}\chi_{[0,1]}\|_Y \leqslant \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \|\chi_{[0,1]}\|_X = \|\mathscr{K}\|_{X\to Y}.$$

В итоге получаем

$$\|x\|_Y \leqslant \gamma \|\bar{f}_1\|_Y \|x\|_{L_{M_1}} \leqslant \gamma \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \|x\|_{L_{M_1}}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 25. Предположим сначала, что функции f_k $(k = 1, 2, \dots)$ симметрично распределены. Обозначим $t_0 := \mathbf{f}^*(1)$, где, как и ранее, $\mathbf{f}$ – соответствующая дизъюнктная сумма. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda\{s \in [0,1] : |f_k(s)| > t_0\} = \lambda\{s > 0 : |\mathbf{f}(s)| > t_0\} \leqslant 1.$$

Если $u_k := f_k \chi_{\{|f_k| > t_0\}}$, $v_k := f_k \chi_{\{|f_k| \leqslant t_0\}}$ $(k = 1, \dots, n)$, то $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ – последовательности независимых симметрично распределенных функций и $f_k = u_k + v_k$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda(\operatorname{supp} u_k) \leqslant 1$, то по теореме 22 (см. также ее доказательство)

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} u_k \Big\|_Y \leqslant 4\|\mathbf{u}\|_X = 4\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X. \tag{60}$$

Одновременно, применяя лемму 15 и предложение 6, а также учитывая, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$, получаем:

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=1}^{n} v_k \Big\|_Y &\leqslant \gamma \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \Big\| \sum_{k=1}^{n} v_k \Big\|_{L_{M_1}} \leqslant \gamma\beta \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \|\mathbf{v}\|_{L_2 \cap L_\infty} \\
&\leqslant \gamma\beta \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \|\mathbf{f}^*\chi_{[1,\infty)}\|_{L_2\cap L_\infty} \leqslant \gamma\beta \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} (t_0 + \|\mathbf{f}^*\chi_{[1,\infty)}\|_{L_2}) \\
&\leqslant \gamma\beta \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} (\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|\mathbf{f}^*\chi_{[1,\infty)}\|_{L_2}) = \gamma\beta \|\mathscr{K}\|_{X\to Y} \|\mathbf{f}\|_{Z_X^2}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (60) следует, что для симметрично распределенных функций неравенство (58) выполнено с константой $4 + \gamma\beta$.

Рассмотрим общий случай, когда известно лишь, что $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. Действуя стандартным образом, применим симметризацию. Пусть

$\{f'_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых копий функций f_k $(k = 1, \dots, n)$ и, кроме того, $h_k := f_k - f'_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Тогда $\{h_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых симметрично распределенных с. в., и, как уже доказано, для нее неравенство (58) выполнено.

Пусть $\mathscr{B}$ – σ-подалгебра, порожденная последовательностью $\{f_k\}_{k=1}^n$, а $\mathsf{E}_{\mathscr{B}}$ – оператор условного математического ожидания, соответствующий ей. Ввиду предложения 2 выполнено равенство $\|\mathsf{E}_{\mathscr{B}}\|_{Y\to Y} = 1$. Следовательно,

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_Y = \Big\|\mathsf{E}_{\mathscr{B}}\Big(\sum_{k=1}^n h_k\Big)\Big\|_Y \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^n h_k\Big\|_Y.$$

Так как $\lambda\{t > 0 : |\mathbf{h}(t)| > x\} \leqslant 2\lambda\{t > 0 : |\mathbf{f}(t)| > x\}$ $(x \geqslant 0)$, то ввиду предложения 1 неравенство (58) выполнено и в этом случае с константой $\alpha = 8 + 2\gamma\beta$. Теорема доказана.

6. Неравенства типа Розенталя для симметричных (квази)норм на последовательностях независимых функций

Пусть E – симметричное (квази)банахово пространство последовательностей (см. раздел 2), $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset E$ – стандартный базис в E, а X – симметричное пространство функций на $[0,1]$. Для произвольной последовательности неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ рассмотрим величину

$$\Big\|\Big\|\sum_{k=1}^n f_k e_k\Big\|_E\Big\|_X.$$

Основная цель этого раздела – найти как можно более точные оценки для нее в терминах дизъюнктных копий функций данной последовательности. Результаты такого рода находят многочисленные применения при изучении различных вопросов геометрии пространств, например, в локальной теории выпуклых тел [54], [55]. “Происхождение” этой величины очевидно: в случае $E = \ell_1$ и $X = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ она фигурирует в неравенстве Розенталя (6). Мы отдельно рассмотрим оценки снизу и сверху, так как условия, при которых они имеют место, а также методы их доказательства различны.

6.1. Нижние оценки. Мы начнем с одного несложного, но важного утверждения, доказанного в [56; предложение 1] (очень близкий результат см. в [35; лемма 3]).

Предложение 7. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность неотрицательных независимых функций, определенных на $[0,1]$, а $\mathbf{f}$ – соответствующая дизъюнктная сумма. Для любого $t > 0$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}\,\lambda\{\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]} > t\} \leqslant \lambda\Big\{\sup_{k=1,2,\dots} f_k > t\Big\} \leqslant \lambda\{\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]} > t\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $t > \mathbf{f}^*(1)$ (достаточно рассмотреть лишь этот случай) и обозначим $a_k := \lambda\{f_k > t\}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда ввиду (25), а также независимости функций f_k

$$\lambda\{\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]} > t\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \lambda\Big\{\sup_{k=1,2,\dots} f_k > t\Big\} = 1 - \prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k).$$

Нетрудно показать, что

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k) \leqslant 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k}\,.$$

Например, правое неравенство является следствием оценок

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k)(1 + a_k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_k^2) \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\,\lambda\{\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]} > t\} \leqslant \frac{\lambda\{\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]} > t\}}{1 + \lambda\{\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]} > t\}} \leqslant \lambda\Big\{\sup_{k=1,2,\dots} f_k > t\Big\} \leqslant \lambda\{\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]} > t\},$$

и предложение доказано.

Следующее утверждение было получено в работе [57] (см. также [58], [59]).

Теорема 26. *Для произвольных функционального симметричного пространства X и банахова симметричного пространства последовательностей E, для всех $n \in \mathbb{N}$ и любой последовательности неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X + \left\|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}^*(k)e_k\right\|_E \leqslant 6\left\|\,\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k e_k\right\|_E\right\|_X. \tag{61}$$

Доказательство. Сначала мы докажем неравенство (61) в частном случае, когда $X = L_1$, а E – пространство последовательностей $\mathbf{s}_r$ $(r = 1, 2, \dots)$ с нормой $\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\mathbf{s}_r} := \sum_{k=1}^{r} a_k^\sharp$, где $(a_k^\sharp)_{k=1}^{\infty}$ – невозрастающая перестановка последовательности $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$.

Обозначим $A(t) := \mathbf{f}^*(t)$ и $B(t) := \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(t)$. Тогда ввиду предложения 7

$$\frac{1}{2}\int_0^1 A(t)\,dt \leqslant \int_0^1 B(t)\,dt \leqslant \int_0^1 A(t)\,dt. \tag{62}$$

Далее рассмотрим последовательность $\{g_k\}_{k=1}^n$ независимых с. в. таких, что $\lambda\{g_k = 1\} = 1/r$ и $\lambda\{g_k = 0\} = (r-1)/r$ $(k \geqslant 1)$, где $r \in \mathbb{N}$ и $1 < r \leqslant n$. Предположим также, что эта последовательность независима относительно последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n$. Будем считать, что все функции определены на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, $f_k = f_k(t)$, $g_k = g_k(s)$. Рассмотрим последовательность $\{f_k g_k\}_{k=1}^n$, обозначив через $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ соответствующие ей величины, аналогичные A и B

(определенным ранее для последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n$). Применяя к ней (62), получим, что

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \mathscr{A}(u)\,du \leqslant \int_0^1\int_0^1 \mathscr{B}(s,t)\,ds\,dt \leqslant \int_0^1 \mathscr{A}(u)\,du.$$

Так как $(f_kg_k)^* = (\sigma_{1/r}f_k)^*$ (см. доказательство теоремы 22), где, как обычно, $\sigma_{1/r}f_k(t) = f_k(rt)$, то $\mathscr{A}(u) = \sigma_{1/r}A(u)$ $(u > 0)$. Следовательно,

$$\int_0^1 \mathscr{A}(u)\,du = \int_0^1 \sigma_{1/r}A(u)\,du = \int_0^1 A(ru)\,du = \frac{1}{r}\biggl(\int_0^1 A(u)\,du + \int_1^r A(u)\,du\biggr),$$

и ввиду неравенства $\sum_{k=2}^r A(k) \leqslant \int_1^r A(u)\,du \leqslant \sum_{k=1}^r A(k)$ из предыдущих соотношений следует:

$$\frac{1}{4r}\biggl(\int_0^1 A(u)\,du + \sum_{k=1}^r A(k)\biggr) \leqslant \int_0^1\int_0^1 \mathscr{B}(s,t)\,dsdt \leqslant \frac{1}{r}\biggl(\int_0^1 A(u)\,du + \sum_{k=1}^r A(k)\biggr). \tag{63}$$

Покажем, что из последнего неравенства вытекает (61) в случае $X = L_1$, $E = \mathbf{s_r}$. Рассмотрим оператор $\mathsf{E}_{\mathscr{M}}$ условного математического ожидания относительно σ-подалгебры $\mathscr{M}$ σ-алгебры измеримых по Лебегу подмножеств квадрата $[0,1]\times[0,1]$, состоящей из всех множеств вида $e\times[0,1]$, где e – произвольное измеримое подмножество $[0,1]$. Если f суммируема на $[0,1]\times[0,1]$, то $\mathsf{E}_{\mathscr{M}}f(t) = \int_0^1 f(t,s)\,ds$. В частности,

$$\mathsf{E}_{\mathscr{M}}\mathscr{B}(t) = \int_0^1 \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(t)g_k(s)\,ds.$$

Если теперь $\mathscr{A}_t$ – величина, аналогичная A и соответствующая последовательности $\{f_k(t)g_k(\cdot)\}_{k=1}^n$, то для каждого $t\in[0,1]$

$$\int_0^1 \mathscr{A}_t(u)\,du = \int_0^1 \sum_{k=1}^r (f_k(t))^\sharp \chi_{((k-1)/r,k/r)}(s)\,ds = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^r (f_k(t))^\sharp.$$

Следовательно, применяя (62) к последовательности $\{f_k(t)g_k(\cdot)\}_{k=1}^n$, получаем

$$\frac{1}{2r}\sum_{k=1}^r (f_k(t))^\sharp \leqslant \mathsf{E}_{\mathscr{M}}\mathscr{B}(t) \leqslant \frac{1}{r}\sum_{k=1}^r (f_k(t))^\sharp, \qquad 0 < t \leqslant 1. \tag{64}$$

Так как $\int_0^1\int_0^1 \mathscr{B}(s,t)\,ds\,dt = \int_0^1 \mathsf{E}_{\mathscr{M}}\mathscr{B}(t)\,dt$, то из (64) и (63) следует, что

$$\frac{1}{4}\biggl(\int_0^1 A(u)\,du + \sum_{k=1}^r A(k)\biggr) \leqslant \int_0^1 \sum_{k=1}^r (f_k(t))^\sharp\,dt \leqslant 2\biggl(\int_0^1 A(u)\,du + \sum_{k=1}^r A(k)\biggr), \tag{65}$$

и неравенство (61) доказано, если $X = L_1$, а $E = \mathbf{s}_r$ $(r = 1,2,\dots)$.

Рассмотрим общий случай. Прежде всего, заметим, что неравенство (61) будет следствием оценок

$$\|A\chi_{[0,1]}\|_X \leqslant 2\Big\|\Big\|\sum_{k=1}^n f_k e_k\Big\|_E\Big\|_X \quad \text{и} \quad \Big\|\sum_{k=1}^n A(k)e_k\Big\|_E \leqslant 4\Big\|\Big\|\sum_{k=1}^n f_k e_k\Big\|_E\Big\|_X. \quad (66)$$

Первая из них ввиду очевидного соотношения $\max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^n f_k e_k\Big\|_E$, а также предложения 1 сразу вытекает из левой части неравенства, доказанного в предложении 7.

Для доказательства второго из неравенств (66) воспользуемся двойственностью. Прежде всего,

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=1}^n f_k e_k\Big\|_E &= \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n,\, \|b\|_{E^\times}\leqslant 1} \sum_{k=1}^n (f_k(t))^\sharp b_k^\sharp \\ &= \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n,\, \|b\|_{E^\times}\leqslant 1} \sum_{r=1}^n \|(f_k(t))_{k=1}^n\|_{\mathbf{s}_r}(b_r^\sharp - b_{r+1}^\sharp), \qquad b_{n+1}^\sharp = 0,\end{aligned}$$

где двойственное пространство $E^\times$ определяется совершенно аналогично тому, как это делается в случае функциональных пространств. Поэтому

$$\int_0^1 \Big\|\sum_{k=1}^n f_k(t)e_k\Big\|_E\,dt \geqslant \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n,\, \|b\|_{E^\times}\leqslant 1} \sum_{r=1}^n (b_r^\sharp - b_{r+1}^\sharp)\int_0^1 \|(f_k(t))_{k=1}^n\|_{\mathbf{s}_r}\,dt.$$

Отсюда и из (65) следует, что

$$\begin{aligned}4\int_0^1 \Big\|\sum_{k=1}^n f_k(t)e_k\Big\|_E\,dt &\geqslant \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n,\, \|b\|_{E^\times}\leqslant 1} \sum_{r=1}^n (b_r^\sharp - b_{r+1}^\sharp)\sum_{k=1}^r A(k) \\ &= \sup_{b=\{b_k\}_{k=1}^n,\, \|b\|_{E^\times}\leqslant 1} \sum_{k=1}^n A(k)b_k^\sharp = \Big\|\sum_{k=1}^n A(k)e_k\Big\|_E.\end{aligned}$$

Так как для произвольного симметричного пространства X на $[0,1]$ выполнено неравенство $\|f\|_{L_1} \leqslant \|f\|_X$ $(f \in X)$, то получаем нужное нам неравенство, и теорема доказана.

Ключевой момент доказательства последней теоремы состоит в применении двойственности, и поэтому оно не может быть обобщено на квазинормированные симметричные пространства последовательностей. Кроме того, в его заключительной части используется вложение $X \subset L_1$, вообще говоря, неверное для квазинормированных симметричных пространств X. В то же время, как показано в недавней работе [60], справедливость неравенства (61) обусловлена исключительно вероятностно-комбинаторными причинами. Приведем без доказательства некоторые результаты, полученные в [60].

Теорема 27. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$ – произвольная последовательность неотрицательных независимых функций на $[0,1]$. Тогда*

$$\lambda\Big\{t \in [0,1] : \sum_{k=1}^n f_k(t) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k)\Big\} \geqslant \frac{1}{8}.$$

Следствие 4. *Пусть X – произвольное квазинормированное симметричное пространство на $[0,1]$. Тогда существует константа $\alpha>0$, зависящая лишь от X, такая, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ и любой последовательности неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n$ на $[0,1]$ справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X+\sum_{k=1}^n\mathbf{f}^*(k)\leqslant\alpha\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_X.$$

Теорема 28. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $\{f_k\}_{k=1}^n$ – произвольная последовательность равноизмеримых неотрицательных независимых функций на $[0,1]$. Тогда существует константа $c_0>0$, не зависящая от n и функций f_k, для которой выполнено*:

$$\lambda\bigg\{t\in[0,1]: f_j^\sharp(t)\geqslant\mathbf{f}^*(2j-1),\ j=1,\dots,\Big[\frac{n}{2}\Big]\bigg\}\geqslant c_0.$$

Следствие 5. *Пусть X и E – произвольные квазинормированные симметричные пространства функций на $[0,1]$ и последовательностей соответственно, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – стандартный базис в E. Тогда существует константа $C>0$, зависящая лишь от константы из неравенства треугольника в E, такая, что для любого $n\in\mathbb{N}$ и всякой последовательности равноизмеримых неотрицательных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n\subset X$ выполнено неравенство*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n\mathbf{f}^*(k)e_k\Big\|_E\leqslant C\Big\|\Big\|\sum_{k=1}^n f_ke_k\Big\|_E\Big\|_X,$$

6.2. Верхние оценки в симметричных пространствах со свойством Круглова. Рассмотрим теперь противоположное по отношению к (61) неравенство

$$\Big\|\Big\|\sum_{k=1}^n f_ke_k\Big\|_E\Big\|_X\leqslant C\bigg(\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X+\Big\|\sum_{k=1}^n\mathbf{f}^*(k)e_k\Big\|_E\bigg),\tag{67}$$

где, как и ранее, $\mathbf{f}$ – дизъюнктная сумма последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n\subset X$.

Если $E=\ell_1$ и $X=L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$, то это соотношение совпадает (с точностью до константы) с правой частью неравенства Розенталя (6). В более общей ситуации, когда $E=\ell_1$, а X – произвольное симметричное пространство, содержащее пространство L_p при некотором $p<\infty$, мы получаем неравенство (27), доказанное У. Джонсоном и Г. Шехтманом [35]. Позднее С. Монтгомери-Смит [57; теорема 1] распространил (67) на произвольные симметричные пространства последовательностей E (с тем же условием на X). Во всех упомянутых работах доказательство в решающей степени было основано на применении хорошо известного неравенства Хоффмана-Йоргенсона [36] или его вариантов. В [42; теорема 6.7], напротив, была использована конструкция оператора Круглова и интерполяция операторов. Оценка (67) была получена там для любого симметричного пространства X со свойством Круглова, но лишь в специальном случае, когда $E=\ell_q$ $(1\leqslant q\leqslant\infty)$. Здесь мы докажем наиболее общий (и фактически окончательный) результат такого рода из более поздней работы [61; теорема 1], который верен не только для нормированных, но и для квазинормированных симметричных пространств последовательностей, удовлетворяющих некоторым не очень ограничительным условиям.

В дальнейшем нам понадобится неравенство (67) в частном случае $E = \ell_q$ ($1 \leqslant q \leqslant \infty$) с точной по порядку константой при $q \to \infty$. Как уже говорилось, его первоначальная версия была получена в работе [42]; здесь мы приводим более точный результат из [44], в котором выявлена зависимость константы C от нормы оператора Круглова и q (что будет играть решающую роль в доказательстве следующей теоремы).

Теорема 29. *Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0,1]$, $X \subseteq Y$ с константой 1 и норма в Y порядково полунепрерывна. Если оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из X в Y, то существует такая универсальная константа $\beta > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$, произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ и любого $q \in [1,\infty]$ справедливо неравенство*

$$\bigl\|\|(f_k)_{k=1}^n\|_{\ell_q}\bigr\|_Y \leqslant \beta\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}^{1/q}\bigl(\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|(\mathbf{f}^*(k))_{k=1}^n\|_{\ell_q}\bigr). \tag{68}$$

В доказательстве нам понадобится следующая конструкция из теории банаховых пространств [17; с. 46]. Если X – симметричное пространство на $[0,1]$, то $\widetilde{X(\ell_p)}$ – множество всех таких последовательностей $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, что

$$\|\mathbf{f}\|_{\widetilde{X(\ell_p)}} := \sup_{n=1,2,\dots}\biggl\|\biggl(\sum_{k=1}^n |f_k|^p\biggr)^{1/p}\biggr\|_X < \infty$$

(с естественной модификацией при $p = \infty$). Замкнутое подпространство пространства $\widetilde{X(\ell_p)}$, порожденное всеми финитными последовательностями $\{f_k\} \in \widetilde{X(\ell_p)}$, будем обозначать через $X(\ell_p)$.

Доказательство теоремы 29. Предположим сначала, что пространство Y максимально. Тогда, как нетрудно проверить, утверждение (ii) теоремы 22 справедливо для бесконечных сумм, и поэтому с некоторой универсальной константой $\alpha \geqslant 1$

$$\|(f_k)_{k=1}^\infty\|_{Y(\ell_1)} := \biggl\|\sum_{k=1}^\infty |f_k|\biggr\|_Y \leqslant \alpha\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}\|\mathbf{f}\|_{Z_X^1}.$$

Кроме того, ввиду условия теоремы и предложения 7

$$\|(f_k)\|_{Y(\ell_\infty)} \leqslant \|(f_k)\|_{X(l_\infty)} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{Z_X^\infty}.$$

Далее мы используем интерполяционные свойства конструкции Кальдерона (см. раздел 2). Пусть $(\Omega,\mathscr{P}) := \prod_{k=0}^\infty([0,1],\lambda_k)$ и $\delta\colon (\Omega,\mathscr{P}) \to ([0,1],\lambda)$ – отображение, сохраняющее меру. Для каждой функции $g \in S(\Omega,\mathscr{P})$ положим $Tg(x) := g(\delta^{-1}x)$ $(x \in [0,1])$. Тогда отображение $T\colon S(\Omega,\mathscr{P}) \to S([0,1],\lambda)$

переводит каждую функцию g в равноизмеримую ей, т. е. $(Tg)^* = g^*$. Определим, наконец, положительный линейный оператор Q из $S(0,\infty)$ в $S(\Omega,\mathscr{P})$ следующим образом:

$$Qf(\omega_0,\omega_1,\dots) := \{f_k(\omega_k)\}_{k=0}^{\infty}, \qquad f\in S(0,\infty),$$

где $f_k(\omega_k) := f(\omega_k+k)$ $(\omega_k\in[0,1])$, $k\geqslant 0$. Аргументы, приведенные в начале доказательства, показывают, что положительный оператор $Q' := TQ$ ограничен из Z_X^1 в $Y(\ell_1)$ и из Z_X^∞ в $Y(\ell_\infty)$ с нормами, не превосходящими $\alpha\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}$ и 1 соответственно. Поэтому

$$Q'\colon (Z_X^1)^{1-\theta}(Z_X^\infty)^\theta \to (Y(\ell_1))^{1-\theta}(Y(\ell_\infty))^\theta$$

и

$$\|Q'\| \leqslant \|Q'\|_{Z_X^1\to Y(\ell_1)}^{1-\theta}\|Q'\|_{Z_X^\infty\to Y(\ell_\infty)}^{\theta} \leqslant \alpha^{1-\theta}\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}^{1-\theta}, \qquad \theta\in(0,1).$$

Если $q=1/(1-\theta)$, то для каждого $\theta\in(0,1)$ имеют место вложения

$$Z_X^q \subseteq (Z_X^1)^{1-\theta}(Z_X^\infty)^\theta, \qquad (Y(\ell_1))^{1-\theta}(Y(\ell_\infty))^\theta \subseteq Y(\ell_q).$$

В самом деле, чтобы проверить первое из них, для произвольной $g\in Z_X^q$ такой, что $g=g^*$ и $\|g\|_{Z_X^q}=1$, положим

$$g_1 := g\chi_{[0,1]} + g^q\chi_{[1,\infty)}, \qquad g_\infty := g\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,\infty)}.$$

Очевидно, что $g=(g_1)^{1-\theta}(g_\infty)^\theta$. Кроме того, так как $g(1)\leqslant 1$, то g_1 убывает. Следовательно, $g_i\in Z_X^i$ и $\|g_i\|_{Z_X^i}\leqslant 2$ $(i=1,\infty)$. Второе вложение (и даже равенство) доказано в [62; теорема 3]. В итоге мы получаем, что с некоторой универсальной константой $\gamma>0$

$$\|Q'\|_{Z_X^q\to Y(\ell_q)} \leqslant \alpha^{1/q}\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}^{1/q}\gamma \leqslant \max\{\alpha,\gamma\}\|\mathscr{K}\|_{X\to Y}^{1/q}.$$

Утверждение теоремы теперь вытекает из следующего легко проверяемого неравенства

$$\|\mathbf{f}\|_{Z_X^q} \leqslant \|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|(\mathbf{f}^*(k))\|_{\ell_q} \leqslant 2\|\mathbf{f}\|_{Z_X^q},$$

справедливого для произвольного симметричного пространства X и всех $1\leqslant q\leqslant\infty$.

Пусть теперь мы знаем лишь то, что норма Y порядково полунепрерывна. Тогда Y изометрически вложено в максимальное пространство $Y^{\times\times}$ (см. раздел 2). Поэтому результат следует из уже рассмотренного случая и того, что $X\subseteq Y$.

Замечание 7. Пусть X – симметричное пространство на $[0,1]$, для которого существует такая константа $C=C_X>0$, что для каждой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n\subset X$ $(n\in\mathbb{N})$ выполнено неравенство (67). Как уже говорилось в п. 4.1, в классическом случае $X=L_p$ $(1\leqslant p<\infty)$ это неравенство Розенталя. В доказательствах самого Розенталя (см. теорему 6), а также Буркхольдера в [63] несколько более общего результата константа C_{L_p} в (67) экспоненциально растет при $p\to\infty$. Точная (по порядку) константа

$C_{L_p} \asymp p/\ln(p+1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ была найдена в работе [64] (см. также альтернативные доказательства в [31] и [58]). Понятие оператора Круглова позволяет рассмотреть этот вопрос с более общих позиций. Из теорем 22 и 23 вытекает, что наилучшая константа C_X в неравенстве (67) в случае сепарабельных или максимальных симметричных пространств должна быть эквивалентна норме оператора $\mathscr{K}$ в X. Благодаря этому в работе [44] найдены точные (по порядку) константы в неравенстве (67) для различных шкал симметричных пространств, в частности, для пространств Лоренца и Марцинкевича.

Теперь мы докажем аналогичное утверждение для общих квазибанаховых симметричных пространств последовательностей E, удовлетворяющих некоторым условиям. Первое условие состоит в том, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ оператор растяжения

$$\sigma_k(\{a_j\}_{j=1}^{\infty}) := (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{k}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{k}, \dots, \underbrace{a_j, \dots, a_j}_{k}, \dots)$$

ограничен в E и справедливо неравенство

$$\text{(i)} \quad \|\sigma_k\|_{E\to E} \leqslant k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Второе условие заключается в выполнении непрерывного вложения

$$\text{(ii)} \quad \ell_1 \subseteq E.$$

Заметим, что (банахово) симметричное пространство последовательностей E очевидным образом удовлетворяет как условию (i), так и условию (ii).

Теорема 30. *Предположим, что функциональное симметричное пространство X с порядково полунепрерывной нормой имеет свойство Круглова, а квазибанахово симметричное пространство последовательностей E удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii). *Тогда существует константа $C > 0$, зависящая только от X, такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ выполнено неравенство* (67).

Доказательство. Ключевую роль в нашем подходе играет “слабое” ℓ_1-пространство, $\ell_{1,\infty}$ (см. также [58; доказательство теоремы 0.2]). Оно состоит из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=1}^{\infty}$, для которых

$$\|a\|_{1,\infty} := \sup_{k\geqslant 1} k a_k^* < \infty.$$

Легко видеть, что $\ell_{1,\infty}$ – квазибанахово симметричное пространство последовательностей и что

$$\|a+b\|_{1,\infty} \leqslant 2(\|a\|_{1,\infty} + \|b\|_{1,\infty}) \qquad (a, b \in \ell_{1,\infty}). \tag{69}$$

Сначала мы докажем неравенство (67) в этом специальном случае.

Предложение 8. *Если функциональное симметричное пространство X имеет свойство Круглова, то существует такая универсальная константа*

$C_0 > 0$, *что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и произвольной последовательности независимых функций* $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n f_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X \leqslant C_0 \left(\|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X + \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right). \tag{70}$$

Доказательство. Так как доказательство достаточно длинно, приведем здесь лишь его ключевые моменты (подробнее см. в [61]).

Не ограничивая общности, мы можем (и будем) предполагать, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ состоит из неотрицательных функций. Положим $t_0 := \mathbf{f}^*(1)$ и заметим, что

$$\sum_{k=1}^n \lambda\{s \in [0,1] : f_k(s) > t_0\} = \lambda\{s > 0 : \mathbf{f}(s) > t_0\} \leqslant 1.$$

Следовательно, если $g_k := f_k \chi_{\{f_k > t_0\}}$ и $h_k := f_k \chi_{\{f_k \leqslant t_0\}}$ $(k = 1, \ldots, n)$, то $f_k = g_k + h_k$ и $\sum_{k=1}^n \lambda(\operatorname{supp} g_k) \leqslant 1$. Оценим величины

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n g_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X \quad \text{и} \quad \left\| \left\| \sum_{k=1}^n h_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X$$

по отдельности. Пусть $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ – дизъюнктные суммы последовательностей $\{g_k\}_{k=1}^n$ и $\{h_k\}_{k=1}^n$ соответственно. Тогда из определения функций g_k и h_k следует, что $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}^* \chi_{[0,1]} = \mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}$. Так как $\|a\|_{\ell_{1,\infty}} \leqslant \|a\|_{\ell_1}$ $(a \in \ell_1)$, то по теореме 22

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n g_k e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_X \leqslant \left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|_X \leqslant 8 \|\mathscr{K}\|_{X \to X} \|\mathbf{g}^*\|_X = 8 \|\mathscr{K}\|_{X \to X} \|\mathbf{f}^* \chi_{[0,1]}\|_X. \tag{71}$$

Осталось доказать аналогичную оценку для последовательности $\{h_k\}_{k=1}^n$, состоящей из равномерно ограниченных независимых функций. Прежде всего, с помощью теоремы 29 в случае $X = L_p$ $(p \geqslant 1)$ можно показать, что для некоторой универсальной константы $\gamma > 0$

$$\left\| \left\| \sum_{k=1}^n h_k(u) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_p \leqslant \gamma \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \frac{p}{\sqrt{\ln(p+1)}}, \qquad p \geqslant 1,$$

откуда

$$\sup_{p \geqslant 1} \left(\frac{\sqrt{\ln(p+1)}}{p} \left\| \left\| \sum_{k=1}^n h_k(u) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}} \right\|_p \right) \leqslant \gamma \left\| \sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*(k) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}}.$$

Величина из левой части этого неравенства эквивалентна норме функции

$$u \mapsto \left\| \sum_{k=1}^n h_k(u) e_k \right\|_{\ell_{1,\infty}}$$

в уже знакомом нам пространстве Орлича L_{M_2}, где $M_2(u) = e^{u\sqrt{\ln(u+e)}} - 1$ (см., например, [65; следствие 1] или [64; предложение 3.6]). Так как X имеет свойство Круглова, то из теоремы 14 следует, что $L_{M_2} \subseteq X$. Поэтому для некоторой универсальной константы $\gamma' > 0$ получаем

$$\left\|\left\|\sum_{k=1}^{n} h_k(u)e_k\right\|_{\ell_{1,\infty}}\right\|_X \leqslant \gamma' \left\|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}^*(k)e_k\right\|_{\ell_{1,\infty}}.$$

Это вместе с оценкой (71) и неравенством (69) дает нам (70), и доказательство предложения закончено.

Прежде чем продолжить доказательство теоремы 30, введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть E – квазибанахово симметричное пространство последовательностей. Для данного $n \in \mathbb{N}$ определим оператор U_n^E, действующий из множества всех квадратных матриц размера $n \times n$ в n^n-мерное пространство ступенчатых функций в $L_1(0,1)$, порожденное характеристическими функциями промежутков $\Delta_i := [(i-1)n^{-n}, in^{-n})$, $i = 1, \dots, n^n$. Чтобы задать этот оператор, рассмотрим множество $\{1, \dots, n\}^n$ и произвольное взаимно однозначное отображение ϕ этого множества в множество промежутков $\{\Delta_i\}_{i=1}^{n^n}$. Для каждой матрицы $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ ее образом $U_n^E(\alpha)$ является функция

$$U_n^E\alpha(t) := \sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j_k} e_k\right\|_E \chi_{\Delta_{\phi(j_1,\dots,j_n)}}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Определение оператора U_n^E, разумеется, зависит от выбора отображения ϕ. Тем не менее, если X – симметричное пространство на $[0,1]$, то норма $\|U_n^E(\alpha)\|_X$ от ϕ не зависит.

Далее, напомним, что матрица $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^n$ называется *бистохастической*, если

$$\mu_{i,j} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j} = 1, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

Для каждой такой матрицы определим семейство $\xi^\mu = \{\xi_k^\mu\}_{k=1}^n$ независимых с. в., заданных на вероятностном пространстве $[0,1]^n$ следующим образом. Если $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n$, то $\xi_k^\mu(t) = \xi_k^\mu(t_k) = 1/i$ на некотором подмножестве $[0,1]$, мера которого равна $\mu_{i,k}$. Так как матрица μ бистохастическая, то

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda\left\{\xi_k^\mu = \frac{1}{i}\right\} = 1 \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{72}$$

Кроме того, если для $t \in [0,1]^n$ мы имеем $\xi_k^\mu(t) = 1/i_k$, где $1 \leqslant i_k \leqslant n$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то

$$\begin{aligned}\|\xi_k^\mu(t)\|_{l_{1,\infty}} &= \sup_{k=1,\dots,n} k\xi_k^\mu(t)^* = \sup_{r=1,\dots,n} \frac{1}{r}\operatorname{card}\left\{j : \xi_j^\mu(t) \geqslant \frac{1}{r}\right\} \\ &= \sup_{r=1,\dots,n} \frac{1}{r}\operatorname{card}\{k : j_k \leqslant r\}.\end{aligned}$$

В этих обозначениях мы можем следующим образом сформулировать результат, неявно содержащийся в доказательстве предложения 2.1 работы [59].

Предложение 9. *Предположим, что X – произвольное функциональное симметричное пространство, а E – квазибанахово симметричное пространство последовательностей, удовлетворяющее условию* (i) *(с. 57). Тогда для каждой матрицы $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ существует такая бистохастическая матрица $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^n$, что*

$$\|U_n^E\alpha\|_X \leqslant 2\|\max\{1, \|\xi^\mu\|_{1,\infty}\}\|_X \Big\|\sum_{k=1}^n \alpha^*_{(k-1)n+1} e_k\Big\|_E,$$

где через $\{\alpha^*_j\}_{j=1}^{n^2}$ обозначается невозрастающая перестановка последовательности $\{|\alpha_{i,j}|\}_{i,j=1}^n$.

Применим теперь предложения 8 и 9 к доказательству теоремы 30. Так как X имеет свойство Круглова, то ввиду предложения 8

$$\|\,\|\xi^\mu\|_{1,\infty}\|_X \leqslant C_0\bigg(\|\mathbf{f}^*_\xi\chi_{[0,1]}\|_X + \Big\|\sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*_\xi(k)e_k\Big\|_{\ell_{1,\infty}}\bigg),$$

где $\mathbf{f}_\xi$ – дизъюнктная сумма последовательности $\xi^\mu = \{\xi_k^\mu\}_{k=1}^n$. Так как из (72) немедленно следует, что

$$\mathbf{f}^*_\xi(u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\,\chi_{[i-1,i)}(u),$$

то

$$\|\mathbf{f}^*_\xi\chi_{[0,1]}\|_X \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \Big\|\sum_{k=1}^n \mathbf{f}^*_\xi(k)e_k\Big\|_{1,\infty} \leqslant 1.$$

Тем самым $\|\,\|\xi^\mu\|_{1,\infty}\|_X \leqslant 2C_0$, и, применяя предложение 9, мы получаем следующее весьма общее утверждение, которое можно рассматривать как аналог хорошо известных результатов Квапеня–Шютта [6].

Следствие 6. *Если функциональное симметричное пространство X имеет свойство Круглова, то для каждого $n \in \mathbb{N}$, для произвольного квазибанахова симметричного пространства последовательностей E, удовлетворяющего условию* (i)*, и для любой матрицы $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ справедливо неравенство*

$$\|U_n^E\alpha\|_X \leqslant K_0\Big\|\sum_{k=1}^n \alpha^*_{(k-1)n+1} e_k\Big\|_E,$$

где константа K_0 зависит только от X.

Теперь мы готовы к тому, чтобы закончить доказательство теоремы 30. Так как пространство E симметрично, а функции f_k $(k = 1, \dots, n)$ независимы, мы можем (и будем) предполагать, что функции $f_k(s_1, \dots, s_n) = f_k(s_k)$ определены на $[0,1]^n$, неотрицательны и не возрастают. Каждую из них представим в виде суммы трех дизъюнктных слагаемых следующим образом. Если $t_0 = \mathbf{f}^*(1)$, то

$f_k^1 := f_k\chi_{\{f_k>t_0\}}$, $f_k^2 := (f_k - f_k^1)\chi_{[0,1/n)}$ и $f_k^3 := f - f_k^1 - f_k^2$. Заметим, что $\sum_{k=1}^n \lambda(\operatorname{supp} f_k^i) \leqslant 1$, если $i = 1, 2$. Следовательно, ввиду условия (ii) (с. 57), а также по теореме 22

$$\Big\| \Big\| \sum_{k=1}^n f_k^i e_k \Big\|_E \Big\|_X \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^n f_k^i \Big\|_X \leqslant 8\|\mathscr{K}\|_{X\to X}\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X \qquad (i = 1, 2). \tag{73}$$

Осталось показать, что аналогичная оценка справедлива и в случае $i = 3$. Для этого применим следствие 6. Как и в доказательстве теоремы 0.2 из [58], введем матрицу $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$, где

$$\alpha_{i,j} := \sup_{j/n<s_i\leqslant(j+1)/n} f_i^3(s_i), \quad j = 1, \dots, n-1, \qquad \alpha_{i,n} = 0.$$

Пусть $(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, n\}^n$. Тогда, если координаты вектора $s := (s_1, \dots, s_n)$ удовлетворяют неравенствам $j_i/n < s_i \leqslant (j_i + 1)/n$, то

$$\Big\| \sum_{i=1}^n f_i^3(s_i)e_i \Big\|_E \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j_i} e_i \Big\|_E$$

(заметим, что $f_i^3(s_i) = 0$, если $0 \leqslant s_i \leqslant 1/n$). Так как для любого $(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, n\}^n$ выполнено равенство

$$\lambda\Big\{ s \in [0,1]^n : \frac{j_i}{n} < s_i \leqslant \frac{j_i+1}{n}, \ i = 1, \dots, n \Big\} = n^{-n},$$

то ввиду следствия 6 заключаем:

$$\Big\| \Big\| \sum_{k=1}^n f_k^3 e_k \Big\|_E \Big\|_X \leqslant \|U_n^E \alpha\|_X \leqslant K_0 \Big\| \sum_{k=1}^n \alpha^*_{(k-1)n+1} e_k \Big\|_E. \tag{74}$$

Для оценки выражения из правой части неравенства (74) введем семейство независимых случайных величин $\{\tilde f_i\}_{i=1}^n$ на $[0,1]^n$, определяемых данной матрицей $\alpha = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ следующим образом:

$$\tilde f_i(t) = \tilde f_i(t_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}\chi_{[(j-1)/n,j/n]}(t_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Так как $\tilde f_i(t) \leqslant f_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$, то для дизъюнктных сумм

$$\mathbf{f}(t) := \sum_{i=1}^n f_i(t-i+1)\chi_{(i-1,i]}(t) \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{f}}(t) := \sum_{i=1}^n \tilde f_i(t-i+1)\chi_{(i-1,i]}(t) \qquad (t > 0)$$

выполнено: $\tilde{\mathbf{f}}(t) \leqslant \mathbf{f}(t)$ $(t > 0)$. Кроме того, $\tilde{\mathbf{f}}^*(k) = \alpha^*_{kn+1}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ и

$$\alpha_1^* = \sup_{i=1,\dots,n} \sup_{0<s_i\leqslant 1} f_i^3(s_i) \leqslant t_0 = \mathbf{f}^*(1).$$

Следовательно, если L – константа в неравенстве треугольника в пространстве E, то

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\alpha^*_{(k-1)n+1}e_k\|_E \leqslant L\bigg(\alpha_1^*+\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^*_{kn+1}e_k\Big\|_E\bigg)\leqslant L\bigg(\mathbf{f}^*(1)+\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{\mathbf{f}}^*(k)e_k\Big\|_E\bigg)$$
$$\leqslant L\bigg(\mathbf{f}^*(1)+\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{f}^*(k)e_k\Big\|_E\bigg)\leqslant 2L\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{f}^*(k)e_k\Big\|_E,$$

откуда ввиду (74) находим, что

$$\bigg\|\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_k^3e_k\Big\|_E\bigg\|_X\leqslant 2K_0L\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{f}^*(k)e_k\Big\|_E. \tag{75}$$

Так как для всех $t\in[0,1]^n$

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_k(t)e_k\Big\|_E\leqslant L^2\bigg(\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_k^1(t)e_k\Big\|_E+\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_k^2(t)e_k\Big\|_E+\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_k^3(t)e_k\Big\|_E\bigg),$$

то утверждение теоремы 30 следует из соотношений (73) и (75).

Следствие 7. *Пусть функциональное симметричное пространство X имеет свойство Круглова, а E – произвольное (банахово) симметричное пространство последовательностей. Тогда существует константа $C>0$, зависящая только от X, такая, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n\subset X$ верно следующее неравенство:*

$$C^{-1}\bigg(\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X+\bigg\|\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_ke_k\Big\|_E\bigg\|_{L_1}\bigg)\leqslant\bigg\|\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_ke_k\Big\|_E\bigg\|_X$$
$$\leqslant C\bigg(\|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X+\bigg\|\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_ke_k\Big\|_E\bigg\|_{L_1}\bigg). \tag{76}$$

Доказательство. Левое неравенство в (76) верно для любого симметричного пространства X и является непосредственным следствием предложения 7, а также того, что $\|f\|_{L_1}\leqslant\|f\|_X$ $(f\in X)$. Чтобы получить правую оценку, заметим, что ввиду соотношения (61), примененного в частном случае $X=L_1$,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{f}^*(k)e_k\Big\|_E\leqslant C'\bigg\|\Big\|\sum_{k=1}^{n}f_ke_k\Big\|_E\bigg\|_{L_1}.$$

Нужный нам результат следует отсюда и из неравенства (67).

Замечание 8. Оценка, полученная в теореме 30 (и точно так же оценка сверху в следствии 7), точна в следующем смысле. Если она верна в случае $E=\ell_1$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ и произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n\subset X$, где X – сепарабельное или максимальное симметричное пространство на $[0,1]$, то X имеет свойство Круглова (см. теоремы 22 и 23).

Замечание 9. Если банаховы пространства X и E максимальны, то, как нетрудно показать, неравенства (61), (67) и (76) будут верны также для бесконечных последовательностей $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset X$.

7. Неравенство Хинчина и его обобщения

Пусть, как и ранее, $r_k(t) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi t$ $(k = 1, 2, \dots)$ – функции Радемахера, определенные на отрезке $[0, 1]$. Неравенства Хинчина (1), приведенные в разделе 1, вызвали огромное количество исследований и обобщений, нашли многочисленные применения в самых различных разделах анализа (см., например, [3]). В частности, в 1975 г. В. А. Родин и Е. М. Семенов [66] доказали, что для симметричного пространства X на $[0, 1]$ оценка сверху

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k\Bigr\|_X \leqslant C\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\biggr)^{1/2} \tag{77}$$

имеет место тогда и только тогда, когда X содержит пространство $(\exp L_2)_\circ$.

Доказанная в разделе 5 теорема 25 позволяет найти точные условия на симметричное пространство X, при которых в нем справедливо аналогичное неравенство с заменой скалярных кратных функций Радемахера произвольными независимыми функциями, в среднем равными нулю. Фактически мы рассмотрим вопрос о справедливости даже более общей оценки, когда норма ℓ_2 в правой части (77) заменена на норму произвольного симметричного пространства последовательностей $E \neq \ell_1$. Следующая теорема была доказана в работе [67] (см. также [68]).

Теорема 31. *Пусть X – произвольное сепарабельное или максимальное симметричное пространство на $[0, 1]$. Следующие условия эквивалентны*:

(a) $X \in \mathbb{K}$;

(b) *существует такое $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, выполнено*:

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Bigr\|_X \leqslant C\biggl\|\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\biggr)^{1/2}\biggr\|_X; \tag{78}$$

(c) *существуют такие симметричное пространство $E \neq \ell_1$ и константа $C > 0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, выполнено*:

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Bigr\|_X \leqslant C\bigl\|\,\|(f_k)\|_E\bigr\|_X; \tag{79}$$

(d) *существуют такие симметричное пространство $E \neq \ell_1$ и константа $C > 0$, что (79) выполнено для любой последовательности симметрично распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\operatorname{supp} f_k) \leqslant 1. \tag{80}$$

Далее нам понадобятся две леммы, первую из которых мы здесь только сформулируем (доказательство см. в [67]).

Лемма 16. *Пусть X – симметричное пространство на $[0,1]$, а E – симметричное пространство последовательностей, $E \neq \ell_1$. Предположим, что для некоторого $C>0$ и для любой последовательности симметрично распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, удовлетворяющей условию (80), выполнено (79). Тогда аналогичное неравенство (возможно, с иной константой) имеет место и для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющей условию (80).*

Второе утверждение можно получить, используя общие соображения, связанные с теорией интерполяции операторов (см., например, [69; п. 12]), но мы предпочитаем дать его прямое доказательство.

Лемма 17. *Пусть E – симметричное пространство последовательностей, $E \neq \ell_1$. Тогда существует положительная однородная функция первой степени $\psi(u,v)$, возрастающая по каждому аргументу, такая, что $\lim_{u\to 0+}\psi(u,v)=0$ и для всех $a=(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$*

$$\|a\|_E \leqslant \psi(\|a\|_{\ell_\infty}, \|a\|_{\ell_1}). \tag{81}$$

Доказательство. Пусть ϕ_E – фундаментальная функция пространства E, т.е. $\phi_E(n) = \Bigl\|\sum_{k=1}^n e_k\Bigr\|_E$ $(n \in \mathbb{N})$, где e_k – стандартные орты в пространстве последовательностей. Рассмотрим кусочно линейную функцию $\varphi(t)$ на $[0,\infty)$ такую, что $\varphi(0)=0$ и $\varphi(n)=\phi(n)$ $(n\in\mathbb{N})$. Так как $\phi(n)$ возрастает, а $\phi(n)/n$ убывает, то $\varphi(t)$ квазивогнута при $t \geqslant 0$. Поэтому, если $\overline{\varphi}(t)$ – ее наименьшая вогнутая мажоранта, то (см. раздел 2 или [16; теорема 2.1.1])

$$\varphi(t) \leqslant \overline{\varphi}(t) \leqslant 2\varphi(t) \qquad (t>0). \tag{82}$$

Легко проверить, что $\psi(u,v) := v\overline{\varphi}(u/v)$ $(u,v>0)$ – положительная однородная функция первой степени, возрастающая по каждому аргументу. Кроме того, ввиду (82) и определения φ имеем: $\lim_{u\to 0+}\psi(u,v)=0$.

Докажем соотношение (81). Пусть $a=(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant 0$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим $a^n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$. Так как $a^n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k e_i$, где $a_{n+1}=0$, то ввиду вогнутости $\overline{\varphi}(t)$, соотношения (82), а также определения и свойств функции ψ получаем:

$$\begin{aligned}
\|a^n\|_E &\leqslant \sum_{k=1}^n (a_k-a_{k+1})\varphi(k) \leqslant a_1 \sum_{k=1}^n \frac{a_k-a_{k+1}}{a_1}\,\overline{\varphi}(k) \\
&\leqslant a_1\overline{\varphi}\biggl(\sum_{k=1}^n \frac{a_k-a_{k+1}}{a_1}\,k\biggr) = \psi\biggl(a_1, \sum_{k=1}^n (a_k-a_{k+1})k\biggr) \leqslant \psi(\|a\|_{\ell_\infty}, \|a\|_{\ell_1}).
\end{aligned}$$

Из того, что $\|a^n - a\|_{\ell_1} \to 0$, следует: $\|a^n - a\|_E \to 0$, и поэтому, переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем (81). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 31. (a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ состоит из таких независимых функций, что $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. Тогда по теореме 25 существует $C > 0$, зависящее лишь от пространства X, такое, что

$$\biggl\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\biggr\|_X \leqslant C\biggl\|\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{f}_k\biggr\|_{Z_X^2}. \tag{83}$$

Напомним, что $\mathbf{f}_k(t) = f_k(t-k+1)\chi_{[k-1,k)}(t)$ $(t > 0)$, а Z_X^2 – симметричное пространство на $(0,\infty)$ с квазинормой $\|g\|_{Z_X^2} := \|g^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|g^*\chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)}$. Поэтому, если $\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{f}_k$, то по теореме 26 с $E = \ell_2$ получаем:

$$\biggl\|\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{f}_k\biggr\|_{Z_X^2} \leqslant \|\mathbf{f}^*\chi_{[0,1]}\|_X + \biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{f}^*(k)^2\biggr)^{1/2} \leqslant 6\biggl\|\biggl(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\biggr)^{1/2}\biggr\|_X.$$

Отсюда и из (83) сразу следует (78), и (b) доказано.

Импликации (b) $\Rightarrow$ (c) и (c) $\Rightarrow$ (d) очевидны.

(d) $\Rightarrow$ (a). По условию и лемме 16 соотношение (31) выполнено для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющей условию (80). Применяя (31) к функциям $|f_k|$ $(k = 1, 2, \dots)$ и учитывая (81), находим, что

$$\biggl\|\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\biggr\|_X \leqslant C\|\,\|(f_k)\|_E\,\|_X \leqslant C\bigl\|\psi\bigl(\|(f_k)\|_{l_\infty}, \|(f_k)\|_{l_1}\bigr)\bigr\|_X. \tag{84}$$

Пусть $x, y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Так как ввиду свойств функции ψ для произвольных $s, t > 0$

$$\psi(x,y) \leqslant \max\biggl\{\frac{x}{s}\,,\ \frac{y}{t}\biggr\}\psi(s,t) \leqslant \biggl(\frac{x}{s} + \frac{y}{t}\biggr)\psi(s,t),$$

то, взяв s и t так, что $\|x\|/s = \|y\|/t$, получим

$$\|\psi(x,y)\| \leqslant \biggl(\frac{\|x\|}{s} + \frac{\|y\|}{t}\biggr)\psi(s,t) \leqslant 2\max\biggl\{\frac{\|x\|}{s}\,,\ \frac{\|y\|}{t}\biggr\}\psi(s,t) = 2\psi(\|x\|, \|y\|).$$

Тем самым из (84) следует:

$$\begin{aligned}\biggl\|\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|\biggr\|_X &\leqslant 2C\psi\bigl(\bigl\|\|(f_k)\|_{\ell_\infty}\bigr\|_X, \bigl\|\|(f_k)\|_{\ell_1}\bigr\|_X\bigr) \\ &= 2C\biggl\|\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\biggr\|_X\,\psi\biggl(\frac{\bigl\|\|(f_k)\|_{\ell_\infty}\bigr\|_X}{\bigl\|\|(f_k)\|_{\ell_1}\bigr\|_X}\,,1\biggr),\end{aligned}$$

откуда

$$\psi\biggl(\frac{\bigl\|\|(f_k)\|_{\ell_\infty}\bigr\|_X}{\bigl\|\|(f_k)\|_{\ell_1}\bigr\|_X}\,,1\biggr) \geqslant \frac{1}{2C}\,.$$

Так как по лемме 17 $\lim_{u\to 0+}\psi(u,v)=0$, то из последнего неравенства следует, что для некоторого $C_1>0$

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\Big\|_X \leqslant C_1\Big\|\sup_{k=1,2,\dots}|f_k|\Big\|_X.$$

Поэтому ввиду предложения 7 неравенство

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\Big\|_X \leqslant C_1\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{f}_k\Big\|_X$$

выполнено для произвольной последовательности независимых функций, удовлетворяющих условию (4). Так как пространство X максимально или сепарабельно, то, применяя теоремы 22 и 23, получаем, что $X\in\mathbb{K}$. Теорема доказана.

Замечание 10. Если в качестве f_k $(k=1,2,\dots)$ брать лишь скалярные кратные функций Радемахера, то результат будет совсем иным. Как доказано в [70], для каждого пространства последовательностей E, интерполяционного относительно пары (ℓ_1,ℓ_2), найдется функциональное симметричное пространство X на $[0,1]$, для которого имеет место двусторонняя оценка $C^{-1}\|(a_k)\|_E\leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}a_kr_k\Big\|_X \leqslant C\|(a_k)\|_E$. Поэтому, разумеется, оценка справа в последнем неравенстве для некоторого $E\neq\ell_1$ ни в коей мере не гарантирует того, что аналогичная оценка будет верна и для ℓ_2.

Применим теперь теорему 31 к изучению векторнозначных рядов вида

$$F(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(s)r_k(t)\qquad (s,t\in[0,1]),$$

где $\{f_k\}$ – произвольная последовательность независимых функций, а r_k – функции Радемахера. Если X – симметричное пространство на $I=[0,1]$, то $X(I\times I)$ – соответствующее симметричное пространство на квадрате $I\times I$ с нормой $\|f\|_{X(I\times I)}=\|f^*\|_X$.

Теорема 32. *Если симметричное пространство X сепарабельно или максимально, то следующие условия эквивалентны:*

(α) $X\in\mathbb{K}$;

(β) *существует такое $C>0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$ выполнено:*

$$C^{-1}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(s)r_k(t)\Big\|_{X(I\times I)} \leqslant C\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X; \tag{85}$$

(γ) *существует такое $C>0$, что для любой последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$ выполнено:*

$$C^{-1}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X \leqslant \int_0^1\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(s)r_k(t)\Big\|_X\,dt \leqslant C\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{\infty}f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X. \tag{86}$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что левые неравенства в (85) и (86) имеют место в любом симметричном пространстве. Проверим это, например, для (85). Ввиду безусловности последовательности $\{f_k(s)r_k(t)\}_{k=1}^\infty$ в $X(I\times I)$ с константой 1 [39; предложение 1.14], а также неравенств Хинчина (1) для L_1 с оптимальной константой $A_1=1/\sqrt{2}$ из [71] имеем:

$$\Big\|\sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t)\Big\|_{X(I\times I)}=\int_0^1\Big\|\sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t)r_k(u)\Big\|_{X(I\times I)}du$$
$$\geqslant\Big\|\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t)r_k(u)\Big|\,du\Big\|_{X(I\times I)}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\|\Big(\sum_{k=1}^\infty f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X.$$

Доказательство левой части (86) совершенно аналогично.

Далее, так как функции $f_k(s)r_k(t)$ $(k=1,2,\dots)$ независимы и

$$\int_0^1\int_0^1 f_k(s)r_k(t)\,ds\,dt=0\qquad(k=1,2,\dots),$$

то по теореме 31 правое неравенство в (85) – непосредственное следствие (α). Докажем правое неравенство в (86). Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset X$ – последовательность независимых функций. Тогда функции $g_k(s)=f_k(s)-\int_0^1 f_k(t)\,dt$ $(k=1,2,\dots)$ также независимы и, кроме того, $\int_0^1 g_k(t)\,dt=0$, $k=1,2,\dots$. Поэтому, применяя теорему 31 к последовательности $\{g_k(\cdot)r_k(t)\}_{k=1}^\infty$ для фиксированного $t\in[0,1]$ и учитывая в очередной раз, что $\|\chi_{[0,1]}\|_X=1$ и $\|g\|_X\geqslant\int_0^1|g(s)|\,ds$, получим

$$\int_0^1\Big\|\sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t)\Big\|_X dt=\int_0^1\Big\|\sum_{k=1}^\infty\Big(g_k(s)+\int_0^1 f_k(u)\,du\Big)r_k(t)\Big\|_X dt$$
$$\leqslant\int_0^1\Big\|\sum_{k=1}^\infty g_k(s)r_k(t)\Big\|_X dt+\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^\infty\int_0^1 f_k(u)\,du\cdot r_k(t)\Big|\,dt$$
$$\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{k=1}^\infty g_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X+\Big(\sum_{k=1}^\infty\Big(\int_0^1 f_k(u)\,du\Big)^2\Big)^{1/2}\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{k=1}^\infty f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X$$
$$+(C+1)\Big(\sum_{k=1}^\infty\Big(\int_0^1 f_k(u)\,du\Big)^2\Big)^{1/2}\leqslant(2C+1)\Big\|\Big(\sum_{k=1}^\infty f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X.$$

Пусть, наоборот, выполнено (β) или (γ) (точнее, правая часть (85) или (86)). Для доказательства (α) достаточно проверить, что пространство X удовлетворяет условию (d) теоремы 31. Предположим, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty\subset X$ состоит из симметрично распределенных независимых функций, удовлетворяющих (80). Еще раз применяя [39; предложение 1.14], заключаем, что $\{f_k\}$ безусловна с константой 1 в X. Поэтому, если выполнена правая часть (86), то

$$\Big\|\sum_{k=1}^\infty f_k\Big\|_X=\int_0^1\Big\|\sum_{k=1}^\infty f_k(s)r_k(t)\Big\|_X dt\leqslant C\Big\|\Big(\sum_{k=1}^\infty f_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_X,$$

и (d) доказано. Кроме того, распределение $f_k(s)$ на I совпадает с распределением $f_k(s)r_k(t)$ на $I\times I$ $(k=1,2,\dots)$. Действительно, так как f_k симметрично распределены, то для любого $\tau\in\mathbb{R}$

$$\lambda^2\{(s,t)\in I\times I: f_k(s)r_k(t)>\tau\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lambda\{s\in I: f_k(s)>\tau\}+\lambda\{s\in I: -f_k(s)>\tau\}\right)=\lambda\{s\in I: f_k(s)>\tau\}.$$

Значит, ввиду независимости функций f_k $(k=1,2,\dots)$ и $f_k(s)r_k(t)$ $(k=1,2,\dots)$ соответственно получаем

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big\|_X=\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)r_k(t)\Big\|_{X(I\times I)},$$

и тем самым (d) – следствие также и правой части (85). Теорема доказана.

Замечание 11. Утверждения последней теоремы интересно сопоставить с двумя хорошо известными результатами. Ввиду первого из них в любом сепарабельном или максимальном симметричном пространстве X следующие условия эквивалентны: (i) существует такое $C>0$, что для *произвольной* последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$ выполнено соотношение (85), и (ii) нижний индекс Бойда α_X положителен (импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) доказана в [17; предложение 2.d.1], а импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) – в [72]). Второй (неравенство Морэ) говорит о том, что если X является q-вогнутой банаховой решеткой [17; определение 1.d.3] при некотором $q<\infty$, то существует такое $C>0$, что (86) выполнено для *произвольной* последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$ [17; теорема 1.d.6(i)]. Заметим, что, с одной стороны, в обоих упомянутых утверждениях коэффициенты ряда – *произвольные* функции, а с другой, условия выполнения неравенств (85) и (86) в них гораздо более ограничительные, чем условие (α) теоремы 32.

В симметричных пространствах, “близких” к L_∞, неравенство Морэ, о котором шла речь в предыдущем абзаце, вообще говоря, неверно. Тем не менее, в последние годы были получены оценки норм полиномов по системам независимых функций и в таких пространствах. Об этом речь пойдет в следующем разделе.

8. Оценки норм полиномов по системам независимых функций в пространствах, “близких” к L_∞

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – система независимых случайных величин на вероятностном пространстве $(T,\mathscr{T},\tau)$, а $\{f_i\}_{i=1}^n$ – система измеримых функций на другом вероятностном пространстве (X,Σ,μ). Рассмотрим математическое ожидание (относительно τ)

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t)f_i(x)\Big\|_{L_\infty(\mu)}. \tag{87}$$

Классический результат Р. Салема и А. Зигмунда [73] утверждает, что для некоторого $C>0$ и всех $n\in\mathbb{N}$

$$C^{-1}(n\ln n)^{1/2}\leqslant \mathsf{E}\bigg\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)e^{2\pi ijx}\bigg\|_{L_\infty}\leqslant C(n\ln n)^{1/2}, \tag{88}$$

где, как и ранее, $r_i(t)$ – функции Радемахера на $[0,1]$.

В монографиях [74] и [75] детально изучена более общая ситуация, связанная с поведением величины (87) в случае, когда $\{f_i\}$ – система характеров на локально компактной абелевой группе G, определенных в компактной симметричной окрестности V единичного элемента $e\in G$. Доказательство нижних оценок для величины (87) при этом основывается на ее сравнении с величиной

$$\mathsf{E}\bigg\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)f_i(x)\bigg\|_{L_\infty(\mu)}, \tag{89}$$

где $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ – система независимых гауссовских с. в., $\mathsf{E}\gamma_i=0$, $\mathsf{E}\gamma_i^2=1$ $(i=1,2,\dots)$. Решающее значение при этом имеют различные варианты известной леммы Слепяна, позволяющие оценивать снизу выражения вида

$$\mathsf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant m}\bigg|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)f_i(x_k)\bigg|,$$

а тем самым и величину (89) при условии, что точки $x_1,\dots,x_m$ выбраны в V так, что векторы

$$W_{x_k}=\big(f_1(x_k),\dots,f_n(x_k)\big)\in\mathbb{C}^n \qquad (k=1,\dots,m)$$

расположены достаточно далеко друг от друга в евклидовой метрике $\mathbb{C}^n$. Таким образом, оценка снизу для (89) может быть получена только при условии контроля ε-энтропии в ℓ_2^n-метрике множества $\{W_x\}_{x\in V}$. Последнее является нетривиальной задачей даже в относительно простых случаях.

В работах Б. С. Кашина и Л. Цафрири [76] и [77] для решения рассматриваемой задачи был предложен новый интересный метод, основанный на применении версии двумерной центральной предельной теоремы с оценкой остаточного члена. Оказалось, что при его использовании достаточно обеспечить малость *среднего*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|(W_{x_i},W_{x_j})|^2.$$

Последнее сделать, конечно, гораздо легче, чем гарантировать выполнение аналогичного условия для энтропии множества $\{W_{x_i}\}_{i=1}^{n}$, т. е. малость *всех* скалярных произведений (W_{x_i},W_{x_j}) $(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$. Благодаря этому удается показать, что нижняя оценка в (88) остается справедливой для случайных полиномов по *любой* ортонормированной ограниченной в L_3 системе. Приведем формулировку теоремы, доказанной в [76].

Теорема 33. *Для любого $M > 0$ существуют константы $C_j = C_j(M) > 0$ $(j = 1, 2, 3)$ и $q = q(M) > 0$ со следующим свойством: для каждой системы функций $\{f_i\}_{i=1}^n$ такой, что*

(a) $\|f_i\|_{L_2(\mu)} = 1$ *и* $\|f_i\|_{L_3(\mu)} \leqslant M$ $(i = 1, \dots, n)$,

(b) $\displaystyle\Big\|\sum_{i=1}^n a_i f_i\Big\|_{L_2(\mu)} \leqslant M\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\Big)^{1/2}$ *для всех* $a_i \in \mathbb{C}$,

и каждой последовательности с. в. $\{\xi_i\}_{i=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве $(T, \mathscr{T}, \tau)$, такой, что

(c) ξ_i *независимы*, $\mathsf{E}\xi_i = 0$, $\mathsf{E}|\xi_i|^2 = 1$ *и* $(\mathsf{E}|\xi_i|^3)^{1/3} \leqslant M$ $(i = 1, \dots, n)$,

выполнено:

$$\tau\Big\{t \in T : \Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_i\Big\|_{L_\infty(\mu)} \leqslant C_1(n \ln n)^{1/2}\Big\} \leqslant C_2 n^{-q},$$

и, в частности,

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i f_i\Big\|_{L_\infty(\mu)} \geqslant C_3(n \ln n)^{1/2}.$$

В работе [77] было получено обобщение последней теоремы для “случайных” норм вида

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i(t) a_i f_i(x)\Big\|_{L_\infty(\mu)},$$

где $a_i \in \mathbb{C}$. Там же было отмечено, что на самом деле аналогичные оценки снизу верны не только для L_∞-нормы, но и для введенной там же так называемой *интегрально-равномерной* нормы

$$\|f\|_{m,\infty} = \int_X \cdots \int_X \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_m)|\}\, d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_m),$$

где $m \in \mathbb{N}$, а f – произвольная интегрируемая функция на вероятностном пространстве (X, Σ, μ). Несомненно, что оценки для норм $\|\cdot\|_{m,\infty}$ представляют значительный интерес, так как последние несут в себе содержательную информацию о распределении функции f. Прежде всего, как нетрудно показать,

$$\|f\|_{m,\infty} = \int_0^\infty \big(1 - (1 - n_f(z))^m\big)\, dz,$$

где $n_f(z) = \mu\{x \in X : |f(x)| > z\}$. Отсюда, в частности, следует, что $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_{m,\infty} \leqslant \|f\|_\infty$ и $\|f\|_{m,\infty} \to \|f\|_\infty$ при $m \to \infty$. Кроме того, как показано в [78; предложение 2] и независимо в [79; теорема 2], с константами, не зависящими от $m \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_{m,\infty} \asymp m \int_0^{1/m} f^*(t)\, dt. \tag{90}$$

Следующее обобщение результатов Б. С. Кашина и Л. Цафрири было получено П. Г. Григорьевым в [80; теорема 1] (см. также [81; теорема 1]).

Теорема 34. *Пусть $\{f_i\}_{i=1}^n$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – множества функций, определенных на вероятностных пространствах (X,Σ,μ) и $(T,\mathscr{T},\tau)$ соответственно и удовлетворяющих условиям* (a) *и* (c) *теоремы* 33. *Предположим также, что набор $(a_i)_{i=1}^n\in\mathbb{C}^n$ зафиксирован и для всех $(c_i)_{i=1}^n\in\mathbb{C}^n$ выполнено неравенство*

$$\Big\|\sum_{i=1}^n c_i f_i\Big\|_{L_2(\mu)}\leqslant MR(\{a_i\})^p\bigg(\sum_{i=1}^n|c_i|^2\bigg)^{1/2},$$

где $M>0$ и $p\in[0,1/2)$ – некоторые константы, а

$$R=R(\{a_i\})=\bigg(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\bigg)^2\bigg(\sum_{i=1}^n|a_i|^4\bigg)^{-1}.$$

Тогда существуют константы $q=q(p,M)>0$, $C_j=C_j(p,M)>0$ $(j=1,2,3)$, для которых справедливы следующие неравенства:

$$\tau\bigg\{t\in T:\Big\|\sum_{i=1}^n a_i\xi_i(t)f_i\Big\|_{m,\infty}\leqslant C_1\bigg(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\ln P\bigg)^{1/2}\bigg\}\leqslant\frac{C_2}{P^q}\tag{91}$$

и

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n a_i\xi_i f_i\Big\|_{m,\infty}\geqslant C_3\bigg(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\ln P\bigg)^{1/2},\tag{92}$$

где $P:=\min\{m,R\}+1$.

В той же работе показано, что при $m\leqslant n$ и некоторых ограничениях на последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ оценка (92) точна по порядку.

Теорема 35. *Пусть ξ_i $(i=1,\dots,n)$ – независимые с. в., для распределений полиномов относительно которых справедлива экспоненциальная оценка*:

$$\tau\bigg\{t\in T:\Big|\sum_{i=1}^n c_i\xi_i(t)\Big|\geqslant s\bigg(\sum_{i=1}^n|c_i|^2\bigg)^{1/2}\bigg\}\leqslant C_4e^{-C_5s^2}\qquad(s>0),\tag{93}$$

где константы $C_4>0$ и $C_5>0$ не зависят от последовательности коэффициентов $\{c_i\}_{i=1}^n\in\mathbb{C}^n$. Тогда существует такая абсолютная константа $C_6>0$, что для каждого $m\geqslant1$ и произвольных $f_i\in L_1(X)$ $(i=1,\dots,n)$ выполнено:

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n\xi_i f_i\Big\|_{m,\infty}\leqslant C_6\bigg\|\bigg(\sum_{i=1}^n|f_i|^2\bigg)^{1/2}\bigg\|_{m,\infty}\sqrt{1+\ln m}\,.\tag{94}$$

В частности, если $f_i\in L_\infty(X)$ $(i=1,\dots,n)$, то

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n\xi_i f_i\Big\|_{m,\infty}\leqslant C_6\bigg(\sum_{i=1}^n\|f_i\|_\infty^2\bigg)^{1/2}\sqrt{1+\ln m}\,.$$

Следствие 8. *Предположим, что $\|f_i\|_{L_\infty(X)}\leqslant M$ $(i=1,\dots,n)$, а с. в. ξ_i $(i=1,\dots,n)$ независимы и удовлетворяют экспоненциальной оценке* (93). *Тогда для произвольных $a_i\in\mathbb{C}$*

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n a_i\xi_i f_i\Big\|_{m,\infty}\leqslant MC_6\bigg(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\bigg)^{1/2}\sqrt{1+\ln m}\,.$$

Тем самым, если $m \leqslant n$ и $m \leqslant C_7 R(\{a_i\}_{i=1}^n)$ (см. теорему 34), то неравенство (92) из теоремы 34 при этих условиях точно по порядку.

В работе [79] в случае $a_i = 1$ $(i = 1, \dots, n)$ П. Г. Григорьеву удалось распространить утверждение теоремы 34 на системы $\{f_i\}$, вообще говоря, неограниченные в L_p при $p > 1$.

ТЕОРЕМА 36. *Пусть последовательность функций $\{f_i\}_{i=1}^n$, определенных на вероятностном пространстве (X, Σ, μ), такова, что $\|f_i\|_{L_1(\mu)} = 1$ $(i = 1, \dots, n)$ и $\Big\|\sum_{i=1}^n \theta_i f_i\Big\|_{L_1(\mu)} \leqslant M n^{1/2+p}$ для всех наборов знаков $(\theta_i)_{i=1}^n$, $\theta_i = \pm 1$, с некоторыми константами $M > 0$ и $p \in [0, 1/12)$. Кроме того, предположим, что последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ с. в., определенных на вероятностном пространстве $(T, \mathscr{T}, \tau)$, удовлетворяет условию (c) теоремы 33.*

Тогда при любом $m \leqslant n$ справедливо неравенство

$$\tau\bigg\{t \in T : \Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i(t) f_i\Big\|_{m,\infty} \leqslant C_1'\big(n(1 + \ln m)\big)^{1/2}\bigg\} \leqslant C_2' m^{-q'},$$

и, значит,

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i f_i\Big\|_{m,\infty} \geqslant C_3'\big(n(1 + \ln m)\big)^{1/2}$$

с некоторыми константами $q' = q'(p) > 0$ и $C_j' = C_j'(p, M) > 0$ $(j = 1, 2, 3)$.

Из последней теоремы, определения нормы в пространстве Марцинкевича (см. раздел 2), а также соотношения (90) сразу же вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 9. *Пусть $\varphi \in \Psi$. Тогда, если выполнены условия теоремы 36, то*

$$\mathsf{E}\Big\|\sum_{i=1}^n \xi_i f_i\Big\|_{M(\varphi)} \geqslant A\sqrt{n} \max_{m=2,\dots,n}\left\{\frac{\sqrt{\ln m}}{m\varphi(1/m)}\right\}$$

с некоторой константой $A > 0$.

9. Изоморфизмы между симметричными пространствами на $[0, 1]$ и $[0, \infty)$

Общая проблема существования изоморфизмов между симметричными пространствами на $[0, 1]$ и на $[0, \infty)$ (отличными от L_p-пространств) впервые была поставлена Б. С. Митягиным в [82]. Этот и другие близкие вопросы интенсивно изучались в [38] (см. также [17]) на основе подхода, использующего конструкцию стохастического интеграла относительно симметризованного пуассоновского процесса. Здесь мы будем следовать идеям нашей работы [52], где был предложен технически значительно более простой подход, основанный на применении теоремы 25; заметим, что аналогичные аргументы применялись ранее в работе [34] в специальном случае пространств Лоренца $L_{p,q}$. Первая часть следующей теоремы усиливает результаты работы [38] об изоморфном вложении некоторого симметричного пространства на полуоси в данное симметричное пространство X на $[0,1]$, заменяя условие нетривиальности нижнего индекса Бойда X на более слабое условие ограниченности оператора $\mathscr{K}$. Вторая часть теоремы доказана в [83]. Ранее (см. [38; § 8] или [17; с. 203]) аналогичное утверждение было известно лишь в случае, когда симметричное пространство X имеет нетривиальные индексы Бойда.

Теорема 37. (i) *Если оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в симметричном пространстве X, то X содержит подпространство, изоморфное пространству Z_X^2.*

(ii) *Если симметричное пространство X максимально или сепарабельно и оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в X и в $X^\times$, то пространства X и Z_X^2 изоморфны.*

Доказательство. Пусть $(\Omega,\mathscr{P}) := \prod_{k=1}^\infty([0,1],\lambda_k)$ (как и ранее, λ_k – мера Лебега). Тогда по теореме 25 линейный оператор

$$Qx(t,\omega_1,\omega_2,\dots) = \sum_{k=1}^\infty x_k(\omega_k)r_k(t), \quad \text{где } x_k(\omega_k) = x(k-1+\omega_k) \qquad (0\leqslant\omega_k\leqslant 1),$$

ограниченно действует из пространства Z_X^2 в пространство $X(\Omega\times[0,1])$. Кроме того, ввиду теоремы 9 (см. первое из неравенств (26)) существует такая константа $c>0$, что $\|Qf\|_{X(\Omega\times[0,1])} \geqslant c\|f\|_{Z_X^2}$. Тем самым, образ оператора $\operatorname{Im}(Q)$ как подпространство в $X(\Omega\times[0,1])$ изоморфен пространству Z_X^2. Так как пространства X и $X(\Omega\times[0,1])$ изометричны, то утверждение (i) доказано.

Перейдем к доказательству (ii). Покажем, что образ $\operatorname{Im}(Q)$ оператора Q, состоящий из всех функций $g\in X(\Omega\times[0,1])$, представимых в виде суммы ряда

$$g(t,\omega_1,\omega_2,\dots) = \sum_{k=1}^\infty g_k(\omega_k)r_k(t),$$

который сходится п. в. на $\Omega\times[0,1]$, дополняем в пространстве $X(\Omega\times[0,1])$.

Определим на $L_1(\Omega\times[0,1])$ последовательность условных математических ожиданий

$$\mathsf{E}(g\mid\omega_k)(\omega_k) := \biggl(\int_0^1\int_0^1\cdots\biggr)g(t,\omega_1,\omega_2,\dots)\,dt\,d\omega_1\cdots d\omega_{k-1}\,d\omega_{k+1}\cdots \qquad (k\geqslant 1),$$

а также оператор

$$Pg(t,\omega_1,\omega_2,\dots) := \sum_{k=1}^\infty \mathsf{E}(gr_k|\omega_k)r_k(t).$$

Обозначим

$$\langle f,g\rangle := \biggl(\int_0^1\int_0^1\cdots\biggr)f(t,\omega_1,\omega_2,\dots)g(t,\omega_1,\omega_2,\dots)\,dt\,d\omega_1\,d\omega_2\cdots$$

Непосредственная проверка показывает, что для произвольных $x,y\in L_2(0,\infty)$

$$\langle Qx,Qy\rangle = \int_0^\infty x(t)y(t)\,dt \tag{95}$$

и что оператор P самосопряжен, т.е. для любых $f, g \in L_2(\Omega \times [0,1])$

$$\langle Pf, g\rangle = \langle f, Pg\rangle. \tag{96}$$

Докажем, что P ограничен в $X(\Omega \times [0,1])$. Для этого сначала проверим, что для любой $f \in L_\infty(\Omega \times [0,1])$

$$x(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}(fr_k|\omega_k)(t+k-1)\chi_{[k-1,k)}(t) \in L_\infty \cap L_2(0,\infty). \tag{97}$$

Во-первых, легко видеть, что $|\mathsf{E}(fr_k|\omega_k)| \leqslant \|f\|_\infty$ $(k = 1, 2, \dots)$, откуда следует, что $x \in L_\infty$. Кроме того, ввиду очевидного неравенства

$$\begin{aligned}\biggl(\int_0^1\cdots\biggl(\int_0^1 f(u,\omega_1,\dots,\omega_{k-1},t,\omega_{k+1},\dots)r_k(u)\,du\biggr)\,d\omega_1\cdots d\omega_{k-1}\,d\omega_{k+1}\cdots\biggr)^2\\ \leqslant \int_0^1\cdots\biggl(\int_0^1 f(u,\omega_1,\dots,\omega_{k-1},t,\omega_{k+1},\dots)r_k(u)\,du\biggr)^2 d\omega_1\cdots d\omega_{k-1}\,d\omega_{k+1}\cdots,\end{aligned}$$

верного для произвольных $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $k = 1, 2, \dots$, а также неравенства Бесселя имеем:

$$\begin{aligned}\|x\|^2_{L_2(0,\infty)} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\biggl(\int_0^1\cdots f(u,\omega_1,\dots,\omega_{k-1},t,\omega_{k+1},\dots)\\ &\qquad\qquad \times r_k(u)\,du\,d\omega_1\cdots d\omega_{k-1}\,d\omega_{k+1}\cdots\biggr)^2 dt\\ &\leqslant \biggl(\int_0^1\int_0^1\cdots\biggr)\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\int_0^1 f(u,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k,\dots)r_k(u)\,du\biggr)^2 d\omega_1\,d\omega_2\cdots d\omega_k\cdots\\ &\leqslant \biggl(\int_0^1\int_0^1\cdots\biggr) f(u,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k,\dots)^2\,du\,d\omega_1\,d\omega_2\cdots = \|f\|_2^2 \leqslant \|f\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Итак, (97) доказано, и, значит, $x \in Z_X^2$. При этом $Pf = Qx$. Так как по условию X сепарабельно или максимально, то, как легко проверить, соответствующим свойством будет обладать и пространство Z_X^2. Кроме того, $(Z_X^2)^\times = Z_{X^\times}^2$. Ввиду другого условия теоремы $\mathscr{K}: X \to X$. Таким образом, по теореме 25 получаем:

$$\begin{aligned}\|Pf\|_{X(\Omega\times[0,1])} = \|Qx\|_{X(\Omega\times[0,1])} &\leqslant C\|x\|_{Z_X^2}\\ &= C\sup\biggl\{\biggl|\int_0^\infty x(t)y(t)\,dt\biggr| : \|y\|_{Z^2_{X^\times}} \leqslant 1\biggr\}.\end{aligned}$$

Так как оператор $\mathscr{K}$ ограничен также и в $X^\times$, то из соотношений (95), (96), и опять теоремы 25 (но уже примененной к $X^\times$) следует:

$$\begin{aligned}\|Pf\|_{X(\Omega\times[0,1])} &\leqslant C\sup\{|\langle Qx, Qy\rangle| : \|y\|_{Z^2_{X^\times}} \leqslant 1\}\\ &= C\sup\{|\langle Pf, Qy\rangle| : \|y\|_{Z^2_{X^\times}} \leqslant 1\} = C\sup\{|\langle f, Qy\rangle| : \|y\|_{Z^2_{X^\times}} \leqslant 1\}\\ &\leqslant C\sup\{\|Qy\|_{X^\times(\Omega\times[0,1])} : \|y\|_{Z^2_{X^\times}} \leqslant 1\}\,\|f\|_{X(\Omega\times[0,1])} \leqslant CC'\|f\|_{X(\Omega\times[0,1])}.\end{aligned}$$

В итоге для всех $f \in L_\infty(\Omega \times [0,1])$ выполнено неравенство

$$\|Pf\|_{X(\Omega\times[0,1])} \leqslant CC'\|f\|_{X(\Omega\times[0,1])}.$$

Так как по условию X сепарабельно или максимально, то, применяя стандартные рассуждения, заключаем, что проектор P ограничен в этом пространстве. Кроме того, легко видеть, что его образ $\mathrm{Im}(P)$ совпадает с образом $\mathrm{Im}(Q)$ оператора Q. Следовательно, подпространство $\mathrm{Im}(Q)$ (которое ввиду уже доказанной первой части теоремы изоморфно Z_X^2) дополняемо в $X(\Omega \times [0,1])$, которое изоморфно X. С другой стороны, очевидно, что X изоморфно дополняемому подпространству пространства Z_X^2. Так как $X \oplus X$ (соответственно $Z_X^2 \oplus Z_X^2$) изоморфно X (соответственно Z_X^2), то в итоге, применяя метод декомпозиции Пелчинского [17; с. 172], получаем изоморфность X и Z_X^2. Теорема доказана.

Следующий результат, показывающий тесную связь между стохастическим интегралом Пуассона (который является ключевым средством в конструкциях [38; § 8] и [17; 2.f]) и оператором Круглова $\mathscr{K}$, доказан в [52].

Оператор стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона (обозначим его через T) определен на функциях, измеримых на полуоси $(0,\infty)$ [17; с. 205–206]. Если f – функция на $[0,1]$, то $Tf := T'f - T''f$, где

$$T'f(u,v) := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{F_k'}(u) \sum_{j=1}^{k} f(\varphi_j'(v)) \qquad (u,v \in [0,1]).$$

Здесь $\{F_k'\}_{k\geqslant 0}$ – разбиение отрезка $[0,1]$ на попарно дизъюнктные подмножества, $\lambda(F_k') = 1/(ek!)$, $k = 0,1,2,\dots$, а $\{\varphi_j'\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых с. в., равномерно распределенных на $[0,1]$. Подобным же образом определяется и функция $T''f$, при этом соответствующие последовательности $\{F_k''\}_{k\geqslant 0}$ и $\{\varphi_j''\}_{j=1}^\infty$ независимы относительно последовательностей $\{F_k'\}_{k\geqslant 0}$ и $\{\varphi_j'\}_{j=1}^\infty$ соответственно. Таким образом, функции $T'f$ и $T''f$ одинаково распределены и независимы. В случае функций f, определенных на $(0,\infty)$, рассмотрим функции $f_n := f\chi_{(n-1,n)}$ $(n = 1,2,\dots)$. Тогда, если функции b_n – независимые копии f_n, заданные на $[0,1]$, то по определению $Tf := \sum_{n=1}^{\infty} Tf_n$, где Tf_n – независимые копии Tb_n $(n = 1,2,\dots)$.

С помощью оператора Круглова в [52] получена характеризация симметричных пространств X таких, что оператор T ограниченно действует из Z_X^2 в X. Это усиливает результаты [38; § 8] (см. также [17; 2.f]), где было найдено достаточное условие: $\alpha_X > 0$.

Теорема 38. *Если X – сепарабельное или максимальное симметричное пространство на $[0,1]$, то оператор T ограничен из Z_X^2 в X тогда и только тогда, когда оператор $\mathscr{K}$ ограничен в X.*

Доказательство. Пусть сначала оператор T ограничен из Z_X^2 в X. Если f определена на $[0,1]$, то последовательность $\{f(\varphi_j')\}_{j=1}^\infty$ из определения оператора T состоит из независимых с. в., имеющих то же распределение, что и f. Следовательно (см. (33)), с. в. $T'f$ и $\mathscr{K}f$ одинаково распределены и, значит, выполнено $\|T'f\|_X = \|\mathscr{K}f\|_X$. Более того, ввиду независимости $T'f$ и $T''f$ для любого $\tau > 0$

$$\begin{aligned}\lambda^2\{(u,v) : |Tf(u,v)| > \tau\} &\geqslant \lambda^2\{(u,v) : |T'f(u,v)| > \tau \text{ и } u \in F_0''\}\\ &= e^{-1}\lambda^2\{(u,v) : |T'f(u,v)| > \tau\},\end{aligned}$$

и, таким образом, согласно предложению 1 $\|\mathscr{K}f\|_X = \|T'f\|_X \leqslant e\|Tf\|_X$. Итак, если оператор $T\colon Z_X^2 \to X$ ограничен, то ограничен и оператор $\mathscr{K} : X \to X$.

Наоборот, предположим, что $\mathscr{K} : X \to X$ ограничен. Если f определена на $[0,1]$, то по предыдущему

$$\|Tf\|_X = \|T'f - T''f\|_X \leqslant 2\|\mathscr{K}f\|_X. \tag{98}$$

Пусть теперь функция $f \in Z_X^2$ произвольна. Так как операторы T' и T'' положительны, то ввиду определения T [17; с. 207] можно предположить, что f неотрицательна. Обозначим $f_n := f\chi_{(n-1,n)}$ $(n = 1,2,\dots)$. Легко видеть, что существуют такие последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{h_n\}_{n=1}^\infty$, что $f_n = g_n + h_n$, $g_nh_n = 0$ и $\int_{n-1}^n g_n(t)\,dt = \int_{n-1}^n h_n(t)\,dt$ $(n = 1,2,\dots)$. Поэтому, если $f_n' := g_n - h_n$, то $|f_n'| = f_n$ и $\int_{n-1}^n f_n'(t)\,dt = 0$, $n = 1,2,\dots$.

Далее, пусть b_n – определенные на $[0,1]$ независимые копии функций f_n' $(n = 1,2,\dots)$. По теореме 25 имеем

$$\Big\|\sum_{k=1}^n b_k\Big\|_X \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^n f_k'\Big\|_{Z_X^2} = C\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_{Z_X^2}. \tag{99}$$

Кроме того, из определения T [17; с. 207] следует, что $\{Tf_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{Tb_n\}_{n=1}^\infty$ – две последовательности независимых симметрично распределенных с. в., а также что Tf_n и Tb_n одинаково распределены для любого $n = 1,2,\dots$. Поэтому ввиду (98), (99) и ограниченности оператора $\mathscr{K}$ в пространстве X

$$\begin{aligned}\Big\|T\Big(\sum_{k=1}^n f_k\Big)\Big\|_X &= \Big\|\sum_{k=1}^n Tf_k\Big\|_X = \Big\|\sum_{k=1}^n Tb_k\Big\|_X = \Big\|T\Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big)\Big\|_X\\ &\leqslant 2\Big\|\mathscr{K}\Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big)\Big\|_X \leqslant 2\|\mathscr{K}\|_{X\to X}\Big\|\sum_{k=1}^n b_k\Big\|_X\\ &\leqslant 2\|\mathscr{K}\|_{X\to X}C\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_{Z_X^2} \leqslant 2\|\mathscr{K}\|_{X\to X}C\|f\|_{Z_X^2} \quad (n = 1,2,\dots).\end{aligned}$$

Так как X сепарабельно или максимально, то, применяя стандартные аргументы, заключаем, что оператор $T\colon Z_X^2 \to X$ ограничен. Теорема доказана.

Из теоремы 38 и теоремы 2.f.1(i) из [17] вытекает следующий результат.

Следствие 10. *Если симметричное пространство X сепарабельно или максимально и $X \in \mathbb{K}$, то образ оператора стохастического интегрирования относительно симметризованного процесса Пуассона изоморфен пространству Z_X^2.*

10. Гильбертовы подпространства симметричных пространств, порожденные независимыми функциями

Задача описания подпространств симметричных пространств, порожденных последовательностями независимых функций, рассматривалась во многих работах (см., например, [34], [39], [84]). Покажем, что при ее решении весьма эффективным образом может быть использовано свойство Круглова.

Пусть X – симметричное пространство на $[0,1]$. Рассмотрим вопрос о том, каким условиям должно удовлетворять X, чтобы каждая последовательность независимых одинаково распределенных ненулевых функций из X натягивала в нем гильбертово подпространство. Нетрудно показать [85; теорема 3.4], что это эквивалентно существованию $C > 0$, для которого неравенство

$$C^{-1}\|f_1\|_X\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\biggr)^{1/2} \leqslant \biggl\|\sum_{k=1}^{\infty}a_kf_k\biggr\|_X \leqslant C\|f_1\|_X\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\biggr)^{1/2} \tag{100}$$

верно для любой такой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ и всех $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Левая часть (100) выполнена в произвольном симметричном пространстве X [39; лемма 1, с. 52], так что с этой точки зрения интересна лишь его правая часть. Следующие необходимые условия для выполнения неравенства (100) перечислены в [39; с. 71]:

(a) пространство X содержит пространство $(\exp L_2)_\circ$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$;

(c) $f_1 \in L_2$.

Первое из них – непосредственное следствие теоремы Родина и Семенова (см. начало раздела 7 или [66]): достаточно в качестве f_k взять функции Радемахера. Так как f_k одинаково распределены, то второе условие вытекает из оценки

$$Cn^{1/2} \geqslant \biggl\|\sum_{k=1}^{n}f_k\biggr\|_X \geqslant \mathsf{E}\biggl|\sum_{k=1}^{n}f_k\biggr| \geqslant \biggl|\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}f_k\biggr| = n|\mathsf{E}f_1| \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Проверим условие (c). Для произвольной последовательности независимых одинаково распределенных функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ положим: $g_k := f_{2k} - f_{2k-1}$ $(k = 1,2,\dots)$. Тогда g_k симметрично и одинаково распределены и независимы. Следовательно, для них также выполнено соотношение (100). Для каждого $a > 0$ определим $g_{k,a} := g_k\chi_{\{|g_k|<a\}}$ и $h_{k,a} := g_k - 2g_{k,a}$. Ввиду симметричности g_k функции $h_{k,a}$ и g_k одинаково распределены. Следовательно,

$$\mathsf{E}\biggl|\sum_{k=1}^{n}g_{k,a}\biggr| = \frac{1}{2}\,\mathsf{E}\biggl|\sum_{k=1}^{\infty}(g_k - h_{k,a})\biggr| \leqslant \mathsf{E}\biggl|\sum_{k=1}^{n}g_k\biggr| \leqslant C_1n^{1/2}.$$

Положим $\sigma^2(a) := \mathsf{E}g_{1,a}^2$, и пусть γ – гауссовская с. в., $\mathsf{E}\gamma = 0$, $\mathsf{E}\gamma^2 = 1$. Тогда по центральной предельной теореме [50] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\biggl|n^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}g_{k,a}\biggr| = \sigma(a)\mathsf{E}|\gamma|$, откуда ввиду предыдущего неравенства находим, что $\sigma(a)\mathsf{E}|\gamma| \leqslant C_1$ для каждого $a > 0$. Переходя к пределу при $a \to \infty$, получаем: $\mathsf{E}g_1^2 < \infty$, а значит, и $\mathsf{E}f_1^2 < \infty$.

Чтобы сформулировать первый результат об условиях, достаточных для выполнения (100), нам понадобятся некоторые обозначения из [39; § 3.2]. Для произвольных числовой последовательности $a = (a_k)_{k=1}^\infty$ и измеримой функции f на $[0,1]$ положим

$$Q_a f(t) = \sum_{k=1}^\infty \lambda\{s \in [0,1] : |a_k f(s)| > t\}, \qquad t > 0. \tag{101}$$

Говорят, что функция f имеет свойство $A_2(X)$ $(f \in A_2(X))$, если для каждой $a \in \ell_2$ пространство X содержит все функции g, удовлетворяющие условию: $\lambda\{s \in [0,1] : |g(s)| > t\} \leqslant CQ_a f(t)$ $(t > 0)$ для некоторого $C > 0$.

Теорема 39 [39; теорема 3.7]. *Если симметричное пространство X имеет свойство Круглова и $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – такая последовательность независимых одинаково распределенных функций, что $f_1 \in A_2(X)$, $f_1 \in L_2$ и $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$, то выполнено* (100).

Доказательство последнего утверждения в [39; § 3.2] основывается на теории безгранично делимых распределений и весьма длинно и сложно. В то же время, нетрудно видеть, что теорема 39 – непосредственное следствие ранее доказанной теоремы 25 (подробнее см. [85]). Здесь мы докажем другой результат работы [85], демонстрирующий эффективность операторного подхода к решению подобного рода задач: будет сформулировано простое интерполяционное условие, гарантирующее справедливость вложения $X \subset A_2(X)$.

Теорема 40. *Пусть X – симметричное пространство на $[0,1]$, интерполяционное между пространствами L_2 и L_∞, $X \in \mathbb{K}$. Тогда для некоторого $C > 0$ и всех последовательностей независимых одинаково распределенных функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, что $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$, и произвольных $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ выполнено* (100).

Доказательство. Для произвольной фиксированной последовательности $a = (a_k)_{k=1}^\infty \in l_2$ определим линейный оператор $T_a\colon S(0,1) \to S(0,\infty)$ формулой

$$T_a f(t) = \sum_{k=1}^\infty a_k f(t-k+1)\chi_{(k-1,k]}(t).$$

Так как для каждой функции $f \in L_2$ (соответственно $f \in L_\infty$) $\|T_a f\|_2 = \|a\|_2\,\|f\|_2$ (соответственно $\|T_a f\|_\infty = \sup_k |a_k|\,\|f\|_\infty \leqslant \|a\|_2\,\|f\|_\infty$), то ввиду равенств

$$Z_{L_2{}^2} = L_2(0,\infty) \quad \text{и} \quad Z^2_{L_\infty} = L_\infty \cap L_2(0,\infty)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \|T_a f\|_{Z^2_{L_2}} &= \|a\|_2\,\|f\|_2 && (f \in L_2[0,1]),\\ \|T_a f\|_{Z^2_{L_\infty}} &\leqslant 2\|a\|_2\,\|f\|_\infty && (f \in L_\infty[0,1]). \end{aligned} \tag{102}$$

Иначе говоря, T_a ограниченно действует из $L_2[0,1]$ в $Z^2_{L_2}$ и из $L_\infty[0,1]$ в $Z^2_{L_\infty}$. Для того чтобы "проинтерполировать" соотношения (102), распространив их на произвольное симметричное пространство $X \in \mathrm{Int}(L_2, L_\infty)$, нам потребуются две интерполяционные леммы, которые мы здесь только сформулируем (доказательство первой см. в [86; лемма 4], а второй – в [85; лемма 3.3]).

Лемма 18. *Для произвольной банаховой пары* (X_0, X_1) *и любого параметра* Φ *вещественного* $\mathscr{K}$*-метода справедливо следующее равенство*:

$$(X_0, X_0 \cap X_1)^{\mathscr{K}}_{\Phi} = (X_0, X_1)^{\mathscr{K}}_{\Phi} \cap X_0.$$

Так как пара (L_2, L_∞) является $\mathscr{K}$-монотонной [87], а $X \in \mathrm{Int}(L_2, L_\infty)$, то ввиду теоремы Брудного–Кругляка (см. раздел 2 или [22; теорема 3.3.20]) существует параметр Φ вещественного $\mathscr{K}$-метода, для которого

$$X = (L_2, L_\infty)^{\mathscr{K}}_{\Phi}. \tag{103}$$

Лемма 19. *Если выполнено равенство* (103), *то с точностью до эквивалентности норм*

$$Z^2_X(0,\infty) = \bigl(L_2(0,\infty), L_\infty(0,\infty)\bigr)^{\mathscr{K}}_{\Phi} \cap L_2(0,\infty).$$

Продолжим доказательство теоремы 40. Ввиду соотношений (102), а также лемм 18 и 19 существует константа $C_1 > 0$, зависящая лишь от пространства X, такая, что для произвольных $f \in X$ и $a \in \ell_2$

$$\|T_a f\|_{Z^2_X} \leqslant C_1 \|a\|_2 \, \|f\|_X. \tag{104}$$

С другой стороны, так как $X \in \mathbb{K}$ по условию, то мы можем применить теорему 25. Поэтому для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ таких, что $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,dx = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, и любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\biggl\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\biggr\|_X \leqslant \beta \|\mathscr{K}\|_{X\to X} \biggl\|\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{f}_k\biggr\|_{Z^2_X}, \tag{105}$$

где $\beta > 0$ – некоторая универсальная константа. Так как функции f_k $(k = 1, 2, \dots)$ одинаково распределены, то аналогичное свойство имеют и функции $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{f}_k$ и $T_{a^n} f_1$, где $a^n = (a^n_k)$, $a^n_k = a_k$ $(k \leqslant n)$ и $a^n_k = 0$ $(k > n)$. Таким образом, из (104) и (105) вытекает, что

$$\biggl\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\biggr\|_X \leqslant C_1 \beta \|\mathscr{K}\|_{X\to X} \|f_1\|_X \, \|a\|_2, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Справедливость правой оценки в (100) следует теперь из стандартных рассуждений.

Следствие 11. *Пусть X – такое симметричное пространство на $[0,1]$, что неравенство* (100) *выполнено для любой последовательности одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, что $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$. Тогда существует такая константа $C > 0$, что для произвольной последовательности одинаково распределенных дизъюнктных функций $\{g_k\}_{k=1}^n \in X$, $\|g_1\|_X = 1$, любых $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1,\dots,n)$ справедливо следующее неравенство*:

$$\Big\|\sum_{k=1}^n a_k g_k\Big\|_X \leqslant C\bigg(\sum_{k=1}^n a_k^2\bigg)^{1/2}. \tag{106}$$

В частности,

$$\Big\|\sum_{k=1}^n a_k \chi_{[(k-1)/n,k/n]}\Big\|_X \leqslant C\phi_X\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg(\sum_{k=1}^n a_k^2\bigg)^{1/2}. \tag{107}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что существуют такие множества одинаково распределенных функций $\{g_k^+\}_{k=1}^n$ и $\{g_k^-\}_{k=1}^n$, что $|g_k| = g_k^+ + g_k^-$, $g_k^+ g_k^- = 0$ и $\int_0^1 g_k^+(x)\,dx = \int_0^1 g_k^-(x)\,dx$ $(k=1,\dots,n)$. Тогда функции $g_k' := g_k^+ - g_k^-$ $(k = 1,\dots,n)$ одинаково распределены и $\int_0^1 g_1(x)\,dx = 0$. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^n$ – последовательность независимых копий функций g_k'. Тогда $\|f_1\|_X = \|g_1'\|_X = \|g_1\|_X = 1$, и по теореме 40 для произвольных $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$

$$\Big\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\Big\|_X \leqslant C\bigg(\sum_{k=1}^n a_k^2\bigg)^{1/2}, \tag{108}$$

где константа $C > 0$ зависит от X. Кроме того, по первой части теоремы 9 (см. также [39; лемма 5, с. 14–15]) мы получаем:

$$\Big\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\Big\|_X \geqslant \frac{1}{4}\Big\|\sum_{k=1}^n a_k g_k'\Big\|_X = \frac{1}{4}\Big\|\sum_{k=1}^n a_k g_k\Big\|_X. \tag{109}$$

Неравенство (106) следует из (108) и (109), а (107) – частный случай (106).

Следствие 12. *Если симметричное пространство $X \overset{\neq}{\subset} L_2$ и $\phi_X(u) = u^{1/2}$, то существует последовательность одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$, которая натягивает подпространство в X, не изоморфное ℓ_2.*

Доказательство. Предположим, что каждая последовательность одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$, натягивает в X подпространство, изоморфное ℓ_2. Тогда ввиду замечания, сделанного в самом начале раздела, а также следствия 11 выполнено неравенство (107), эквивалентное следующему:

$$\Big\|\sum_{k=1}^n a_k \chi_{[(k-1)/n,k/n]}\Big\|_X \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^n a_k \chi_{[(k-1)/n,k/n]}\Big\|_{L_2}$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, n)$ произвольны. Отсюда немедленно следует включение $L_2 \subseteq X$. Так как одновременно по условию следствия $X \subsetneq L_2$, то $X = L_2$, а это противоречит другому условию.

Замечание 12. В частности, если $X = L_{2,q}$ $(1 \leqslant q < 2)$ (определение см. в разделе 2), то ввиду следствия 12 существует последовательность одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$, натягивающая в X подпространство, не изоморфное ℓ_2. Тем самым, приведенные в начале раздела условия (a)–(c) на симметричное пространство X не достаточны для того, чтобы неравенство (100) было выполнено для каждой последовательности одинаково распределенных независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\int_0^1 f_1(x)\,dx = 0$. Это дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в книге [39; с. 71].

Список литературы

[1] H. P. Rosenthal, "On the subspaces of L_p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables", *Israel J. Math.*, **8**:3 (1970), 273–303.

[2] В. Ф. Гапошкин, "Лакунарные ряды и независимые функции", *УМН*, **21**:6 (1966), 3–82; англ. пер.: V. F. Gaposhkin, "Lacunary series and independent functions", *Russian Math. Surveys*, **21**:6 (1966), 1–82.

[3] Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, "Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия", *УМН*, **50**:5 (1995), 3–62; англ. пер.: G. Peshkir, A. N. Shiryaev, "The Khintchine inequalities and martingale expanding of the sphere of their action", *Russian Math. Surveys*, **50**:5 (1995), 849–904.

[4] С. В. Асташкин, "Функции Радемахера в симметричных пространствах", *Функциональный анализ*, СМФН, **32**, РУДН, М., 2009, 3–161; англ. пер.: S. V. Astashkin, "Rademacher functions in symmetric spaces", *J. Math. Sci.*, **169**:6 (2010), 725–886.

[5] С. В. Асташкин, Д. В. Занин, Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев, "Оператор Круглова и операторы, определяемые случайными перестановками", *Функц. анализ и его прил.*, **43**:2 (2009), 3–18; англ. пер.: S. V. Astashkin, D. V. Zanin, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, "Kruglov operator and operators defined by random permutations", *Funct. Anal. Appl.*, **43**:2 (2009), 83–95.

[6] S. Kwapień, C. Schütt, "Some combinatorial and probabilistic inequalities and their applications to Banach space theory", *Studia Math.*, **82**:1 (1985), 91–106.

[7] C. Schütt, "Lorentz spaces that are isomorphic to subspaces of L_1", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **314**:2 (1989), 583–595, http://www.jstor.org/stable/2001398.

[8] M. Junge, Q. Xu, "Noncommutative Burkholder/Rosenthal inequalities. II: Applications", *Israel J. Math.*, **167**:1 (2008), 227–282.

[9] A. Khintchine, "Über dyadische Brüche", *Math. Z.*, **18**:1 (1923), 109–116.

[10] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958, 507 с.; пер. с нем.: S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, Warszawa, 1935, 298 pp.

[11] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, "Remarque sur la loi du logarithme itéré", *Fund. Math.*, **29** (1937), 215–222.

[12] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999, ISBN: 5-93379-003-6, 550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Trans. Amer. Math. Soc., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, ISBN: 0-8218-4527-6, 451 pp.

[13] A. N. Kolmogoroff, "Über das Gesetz des iterierten Logarithmus", *Math. Ann.*, **101**:1 (1929), 126–135; рус. пер.: "О законе повторного логарифма", А. Н. Колмогоров, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Наука, М., 1986, 34–44; перепеч.: А. Н. Колмогоров, *Избранные труды*, **2**, Наука, М., 2005, 37–46.

[14] Ю. В. Прохоров, "Одна экстремальная задача теории вероятностей", *Теория вероятн. и ее примен.*, **4**:2 (1959), 211–214; англ. пер.: Yu. V. Prokhorov, "An extremal problem in probability theory", *Theory Probab. Appl.*, **4** (1959), 201–203.

[15] Р. Эллиотт, *Стохастический анализ и его приложения*, Мир, М., 1986, 361 с.; пер. с англ.: R. J. Elliott, *Stochastic calculus and applications*, Appl. Math. (N. Y.), **18**, Springer-Verlag, New York, 1982, ISBN: 0-387-90763-7, 302 pp.

[16] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978, 400 с.; англ. пер.: S. G. Krein, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, ISBN: 0-8218-4505-7, 375 pp.

[17] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*. II. *Function Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, ISBN: 3-540-08888-1, 243 pp.

[18] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, Boston, MA, 1988, ISBN: 0-12-088730-4, 469 pp.

[19] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1977, 741 с.; англ. пер. 1-го изд.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis in normed spaces*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, **46**, Macmillan, New York, 1964, 771 pp.

[20] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Физматгиз, М., 1958, 271 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skii, Ja. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961, 249 pp.

[21] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980, 264 с.; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfstróm, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, 207 pp.

[22] Ju. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation functors and interpolation spaces*, v. I, North-Holland Math. Library, **47**, North-Holland, Amsterdam, 1991, ISBN: 0-444-88001-1, 718 pp.

[23] A. P. Calderón, "Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz", *Studia Math.*, **26** (1966), 273–299.

[24] Б. С. Митягин, "Интерполяционная теорема для модулярных пространств", *Матем. сб.*, **66**:4 (1965), 473–482.

[25] A. P. Calderon, "Intermediate spaces and interpolation, the complex method", *Studia Math.*, **24**:2 (1964), 113–190.

[26] Г. Я. Лозановский, "Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона", *Функц. анализ и его прил.*, **6**:4 (1972), 89–90; англ. пер.: G. Ya. Lozanovskii, "A remark on an interpolational theorem of Calderon", *Funct. Anal. Appl.*, **6**:4 (1972), 333–334.

[27] P. Hitczenko, "Domination inequality for martingale transforms of a Rademacher sequence", *Israel J. Math.*, **84**:1–2 (1993), 161–178.

[28] T. Holmstedt, "Interpolation of quasi-normed spaces", *Math. Scand.*, **26**:1 (1970), 177–199.

[29] S. J. Montgomery-Smith, "The distribution of Rademacher sums", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **109**:2 (1990), 517–522.

[30] Ж.-П. Кахан, *Случайные функциональные ряды*, Мир, М., 1973, 304 с.; пер. с англ.: J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, D. C. Heath and Co., Raytheon Education Co., Lexington, MA, 1968, 184 pp.

[31] R. Latala, "Estimation of moments of sums of independent real random variables", *Ann. Probab.*, **25**:3 (1997), 1502–1513.

[32] E. D. Gluskin, S. Kwapien, "Tail and moment estimates for sums of independent random variables with logarithmically concave tails", *Studia Math.*, **114**:3 (1995), 303–309.

[33] P. Hitczenko, S. J. Montgomery-Smith, K. Oleszkiewicz, "Moment inequalities for sums of certain independent symmetric random variables", *Studia Math.*, **123**:1 (1997), 15–42.

[34] N. L. Carothers, S. J. Dilworth, "Inequalities for sums of independent random variables", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:1 (1988), 221–226.

[35] W. B. Johnson, G. Schechtman, "Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces", *Ann. Probab.*, **17**:2 (1989), 789–808.

[36] J. Hoffman-Jørgensen, "Sums of independent Banach space valued random variables", *Studia Math.*, **52** (1974), 159–186.

[37] M. B. Marcus, G. Pisier, "Characterization of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes", *Acta Math.*, **152**:1 (1984), 245–301.

[38] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **19**, № 217, 1979, 298 pp.

[39] M. Sh. Braverman, *Independent random variables and rearrangement invariant spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, ISBN: 0-521-45515-4, 116 pp.

[40] В. М. Круглов, "Замечание к теории безгранично делимых законов", *Теория вероятн. и ее примен.*, **15**:2 (1970), 330–336; англ. пер.: V. M. Kruglov, "A note on infinitely divisible distributions", *Theory Probab. Appl.*, **15**:2 (1970), 319–324.

[41] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: E. Lukacs, *Characteristic functions*, 2nd ed., Hafner, New York, 1970, 350 pp.

[42] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, "Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: An operator approach", *Israel J. Math.*, **145**:1 (2005), 125–156.

[43] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, "Сравнение сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах", *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 483–489; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, "Comparison of sums of independent and disjoint functions in symmetric spaces", *Math. Notes*, **76**:3–4 (1970), 449–454.

[44] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, "Best constants in Rosenthal-type inequalities and the Kruglov operator", *Ann. Probab.*, **38**:5 (2010), 1986–2008; arXiv: 1011.1381.

[45] S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random series and stochastic integrals*: *single and multiple*, Probab. Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1992, ISBN: 0-8176-3572-6, 360 pp.

[46] V. I. Ovchinnikov, "The method of orbits in interpolation theory", *Math. Rep.*, **1**:2 (1984), 349–515.

[47] S. Montgomery-Smith, E. M. Semenov, "Random rearrangements and operators", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **184**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 157–183.

[48] J. V. Ryff, "Orbits of L_1 functions under doubly stochastic transformations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965), 92–100, http://www.jstor.org/stable/1994198.

[49] V. I. Chilin, A. V. Krygin, F. A. Sukochev, "Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators", *Integral Equations Operator Theory*, **15**:2 (1992), 186–226.

[50] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, М., 1976, 432 с.; англ. пер. 2-го изд. 1986 г.: A. A. Borovkov, *Probability theory*, Gordon and Breach, Abingdon, Oxon, 1998, 474 pp.

[51] Ю. В. Прохоров, “Сильная устойчивость сумм и бесконечно делимых законов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **3**:2 (1958), 153–165; англ. пер.: Yu. V. Prokhorov, “Strong stability of sums and infinitely divisible distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **3**:2 (1958), 141–153.

[52] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Ряды независимых функций с нулевым средним в симметричных пространствах со свойством Круглова”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **345**, 2007, 25–50; англ. пер.: S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Series of independent, mean zero random variables in rearrangement-invariant spaces having the Kruglov property”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **148**:6 (2008), 795–809.

[53] F. A. Sukochev, D. V. Zanin, “Khintchine inequalities in quasi-normed spaces”, manuscript.

[54] Y. Gordon, A. Litvak, C. Schütt, E. Werner, “Orlicz norms of sequences of random variables”, *Ann. Probab.*, **30**:4 (2002), 1833–1853.

[55] Y. Gordon, A. Litvak, C. Schütt, E. Werner, “Geometry of spaces between polytopes and related zonotopes”, *Bull. Sci. Math.*, **126**:9 (2002), 733–762.

[56] P. Hitczenko, S. Montgomery-Smith, “Measuring the magnitude of sums of independent random variables”, *Ann. Probab.*, **29**:1 (2001), 447–466.

[57] S. Montgomery-Smith, “Rearrangement invariant norms of symmetric sequence norms of independent sequences of random variables”, *Israel J. Math.*, **131**:1 (2002), 51–60.

[58] M. Junge, “The optimal order for the p-th moment of sums of independent random variables with respect to symmetric norms and related combinatorial estimates”, *Positivity*, **10**:2 (2006), 201–230.

[59] S. V. Astashkin, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, “Banach–Saks type properties in rearrangement-invariant spaces with Kruglov property”, *Houston J. Math.*, **35**:3 (2009), 959–973.

[60] С. В. Асташкин, К. Е. Тихомиров, “О некоторых вероятностных аналогах неравенства Розенталя”, *Матем. заметки* (в печати).

[61] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Symmetric quasi-norms of sums of independent random variables in symmetric function spaces with the Kruglov property”, *Israel J. Math.* (to appear).

[62] А. В. Бухвалов, “Интерполяция линейных операторов в пространствах векторфункций и со смешанной нормой”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:1 (1987), 37–51; англ. пер.: A. V. Bukhvalov, “Interpolation of linear operators in spaces of vector-valued functions and with mixed norm”, *Siberian Math. J.*, **28**:1 (1987), 24–36.

[63] D. L. Burkholder, “A sharp inequality for martingale transforms”, *Ann. Probab.*, **7**:5 (1979), 858–863.

[64] W. Johnson, G. Schechtman, J. Zinn, “Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables”, *Ann. Probab.*, **13**:1 (1985), 234–253.

[65] С. В. Асташкин, “Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:2 (2005), 264–289; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Extrapolation functors on a family of scales generated by the real interpolation method”, *Siberian Math. J.*, **46**:2 (2005), 205–225.

[66] V. A. Rodin, E. M. Semyonov, “Rademacher series in symmetric spaces”, *Anal. Math.*, **1**:3 (1975), 207–222.

[67] С. В. Асташкин, “Независимые функции в симметричных пространствах и свойство Круглова”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 3–20; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Independent functions in rearrangement invariant spaces and the Kruglov property”, *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 945–963.

[68] С. В. Асташкин, “Обобщенное неравенство Хинчина в симметричных пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:2 (2008), 78–81; англ. пер.: S. V. Astashkin, “A generalized Khintchine inequality in rearrangement invariant spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:2 (2008), 144–147.

[69] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, “Основы теории интерполяции линейных операторов”, *Геометрия линейных пространств и теория операторов*, Ярославль, 1977, 31–74.

[70] S. V. Astashkin, “About interpolation of subspaces of rearrangement invariant spaces generated by Rademacher system”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **25**:7 (2001), 451–465.

[71] S. J. Szarek, “On the best constant in the Khintchine inequality”, *Studia Math.*, **58**:2 (1976), 197–208.

[72] С. В. Асташкин, М. Ш. Браверман, “Подпространство симметричного пространства, порожденное системой Радемахера с векторными коэффициентами”, *Операторные уравнения в функциональных пространствах*, Изд-во ВГУ, Воронеж, 1986, 3–10.

[73] R. Salem, A. Zygmund, “Some properties of trigonometric series whose terms have random signs”, *Acta Math.*, **91**:1 (1954), 245–301.

[74] M. B. Marcus, G. Pisier, *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*, Ann. of Math. Stud., **101**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1981, ISBN: 0-691-08289-8; 0-691-08292-8, 151 pp.

[75] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **23**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, ISBN: 3-540-52013-9, 480 pp.

[76] B. Kashin, L. Tzafriri, “Lower estimates for the supremum of some random processes”, *East J. Approx.*, **1**:1 (1995), 125–139.

[77] B. Kashin, L. Tzafriri, “Lower estimates for the supremum of some random processes. II”, *East J. Approx.*, **1**:3 (1995), 373–377.

[78] С. В. Асташкин, “О выделении подсистем, ‘мажорируемых’ системой Радемахера”, *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 483–495; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Extraction of subsystems ‘majorized’ by the Rademacher system”, *Math. Notes*, **65**:4 (1999), 407–417.

[79] П. Г. Григорьев, “Случайные линейные комбинации функций из L_1”, *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 192–220; англ. пер.: P. G. Grigor’ev, “Random linear combinations of functions from L_1”, *Math. Notes*, **74**:1–2 (2003), 185–211.

[80] P. G. Grigoriev, “Estimates for norms of random polynomials”, *East J. Approx.*, **7**:4 (2001), 445–469.

[81] П. Г. Григорьев, “Оценки норм случайных полиномов и их приложение”, *Матем. заметки*, **69**:6 (2001), 950–954; англ. пер.: P. G. Grigor’ev, “Estimates for norms of random polynomials and their application”, *Math. Notes*, **69**:5-6 (2003), 868–872.

[82] Б. С. Митягин, “Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства”, *УМН*, **25**:5 (1970), 63–106; B. S. Mityagin, “The homotopy structure of the linear group of a Banach space”, *Russian Math. Surveys*, **25**:5 (1970), 59–103.

[83] S. V. Astashkin, “Rademacher series and isomorphisms of rearrangement invariant spaces on the finite interval and on the semi-axis”, *J. Funct. Anal.*, **260**:1 (2010), 195–207.

[84] L. E. Dor, J. T. Starbird, “Projections of L_p onto subspaces spanned by independent random variables”, *Compositio Math.*, **39**:2 (1979), 141–175.

[85] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, “Sequences of independent identically distributed functions in rearrangement invariant spaces”, *Function spaces* VIII, Banach Center Publ., **79**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2008, 27–37.

[86] С. В. Асташкин, “Об интерполяции пересечений вещественным методом”, *Алгебра и анализ*, **17**:2 (2005), 33–69; англ. пер.: S. V. Astashkin, “Interpolation of intersections by the real method”, *St. Petersburg Math. J.*, **17**:2 (2006), 239–265.

[87] G. G. Lorentz, T. Shimogaki, “Interpolation theorems for the pairs of spaces (L^p, L^∞) and (L^1, L^q)”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **159** (1971), 207–221.

С. В. Асташкин (S. V. Astashkin)
Самарский государственный университет
E-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию
21.06.2010

Ф. А. Сукочев (F. A. Sukochev)
School of Mathematics and Statistics,
University of New South Wales, Kensington, Australia
E-mail: f.sukochev@unsw.edu.au