УДК 517.982.27

Об устойчиво $\mathscr{K}$-монотонных банаховых парах

© 2010. С. В. Асташкин, К. Е. Тихомиров

1. Введение. Пусть $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ — банаховы пары. Банаховы пространства X и Y, $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$, называются C-*интерполяционными* относительно пар $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, если каждый линейный оператор T, ограниченный как оператор из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1, ограничен как оператор из X в Y и $\|T\|_{X \to Y} \leqslant C \max_{i=0,1} \|T\|_{X_i \to Y_i}$. Для произвольной банаховой пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$, $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ определим $\mathscr{K}$-*функционал Петре*

$$\mathscr{K}(t, x; \vec{X}) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1,\ x_i \in X_i\}.$$

Банаховы пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$ и $\vec{Y} = (Y_0, Y_1)$ называют (*равномерно*) *относительно $\mathscr{K}$-монотонными с константой* $\lambda > 0$, если из того, что X и Y являются C-интерполяционными пространствами для некоторого $C > 0$ относительно пар $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, $x \in X$ и $\mathscr{K}(t, y; \vec{Y}) \leqslant \mathscr{K}(t, x; \vec{X})$ для всех $t > 0$ и некоторого $y \in Y_0 + Y_1$, следует, что $y \in Y$ и $\|y\|_Y \leqslant \lambda C \|x\|_X$. В частном случае, когда $\vec{X} = \vec{Y}$, говорят о (*равномерно*) *$\mathscr{K}$-монотонной паре*. Важность класса $\mathscr{K}$-монотонных пар обусловлена, в основном, возможностью описания всех пространств, интерполяционных относительно них. А именно, если X — пространство, интерполяционное относительно $\mathscr{K}$-монотонной пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$, то $X = (X_0, X_1)^{\mathscr{K}}_E$, где $(X_0, X_1)^{\mathscr{K}}_E$ — пространство *вещественного $\mathscr{K}$-метода интерполяции*, построенное по некоторой банаховой решетке E двусторонних числовых последовательностей и состоящее из всех $x \in X_0 + X_1$, таких, что $(\mathscr{K}(2^k, x; \vec{X}))_{k=-\infty}^{\infty} \in E$, с нормой $\|x\| := \|(\mathscr{K}(2^k, x; \vec{X}))_k\|_E$ [1, теорема 4.4.5].

Далее речь будет идти, главным образом, о сепарабельных банаховых решетках E двусторонних числовых последовательностей, таких, что $\|e_n\| = 1$, где $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — стандартный базис в пространстве последовательностей. Каждая такая решетка порождает банахову пару $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$, где для любой фиксированной последовательности $v = (v_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, $v_k > 0$, через $E(v_k)(= E(v))$ обозначается *весовое пространство*, состоящее из всех последовательностей $a = (a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, таких, что $a \cdot v \in E$, с нормой $\|a\|_{E(v_k)} := \|a \cdot v\|_E$. $\mathscr{K}$-монотонность такой пары связана с наличием у решетки, порождающей ее, следующих весьма специфических геометрических свойств [2].

Пусть $x = (x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ — числовая последовательность и $\operatorname{supp} x = \{k \in \mathbb{Z} : x_k \neq 0\}$ — ее носитель. Неравенство $A < B$ (где $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$) означает, что $a < b$ для произвольных $a \in A$, $b \in B$. Говорят, что банахова решетка последовательностей E обладает *свойством* (RSP), если существует такое $C > 0$, что для произвольных семейств $\{x^n\}_{n=1}^m$, $\{y^n\}_{n=1}^m$ числовых последовательностей x^n, y^n, таких, что их носители конечны,

$$\operatorname{supp} x^n < \operatorname{supp} y^n \quad (1 \leqslant n \leqslant m), \qquad \operatorname{supp} y^n < \operatorname{supp} x^{n+1} \quad (1 \leqslant n \leqslant m-1)$$

и $\|y^n\|_E \leqslant \|x^n\|_E = 1$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$, а также любых $a_n \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\| \sum_{n=1}^m a_n y^n \|_E \leqslant C \| \sum_{n=1}^m a_n x^n \|_E$. Аналогично, E обладает *свойством* (LSP), если существует такое $C > 0$, что для произвольных $\{x^n\}_{n=1}^m$, $\{y^n\}_{n=1}^m$, носители которых удовлетворяют тем же условиям, что и выше, и $\|x^n\|_E \leqslant \|y^n\|_E = 1$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$, а также любых $a_n \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\| \sum_{n=1}^m a_n x^n \|_E \leqslant C \| \sum_{n=1}^m a_n y^n \|_E$. Как показал Калтон [2, теорема 4.5], пара $\vec{E}$ $\mathscr{K}$-монотонна, если и только если E обладает свойствами (RSP) и (LSP).

Один из основных результатов этой заметки — характеризация пар вида $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$, $\mathscr{K}$-монотонность которых обладает определенной устойчивостью относительно умножения «веса» на константу. Точнее, будет показано, что подобное свойство имеют лишь пары, порожденные банаховой решеткой, инвариантной относительно сдвига. Последний результат интересно сравнить с известной теоремой Цвикеля–Нильсона [3], из которой, в частности, следует, что если $\mathscr{K}$-монотонность пары $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$ устойчива, более того, относительно произвольной замены «веса», то E совпадает либо с l_p $(1 \leqslant p < \infty)$, либо с c_0. В то же время класс $\mathscr{K}$-монотонных пар $\vec{E}$, порожденных сепарабельными инвариантными относительно сдвига банаховыми решетками, нетривиален. Будет приведен пример решетки F, обладающей, кроме перечисленных свойств, также свойствами (RSP), (LSP) и такой, что $F \neq l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $F \neq c_0$. Заметим, что картина резко меняется, если рассматриваются лишь симметричные решетки. Как показал Калтон [2, теорема 4.6], при этих условиях пара $\vec{E}$ является $\mathscr{K}$-монотонной тогда и только тогда, когда $E = l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или $E = c_0$.

2. $\mathscr{K}_u$-монотонные банаховы пары. Если X — банахова решетка измеримых функций, определенных на некотором пространстве с σ-конечной мерой, а $v(t) > 0$ измерима, то весовое пространство $X(v)$ определяется так же, как и в случае последовательностей. Из результатов Седаева [4] и Цвикеля и Нильсона [3] следует, что для сепарабельной банаховой решетки X следующие два условия эквивалентны:

(i) для произвольных «весов» v_0, v_1, w_0, w_1 пары $(X(v_0), X(v_1))$ и $(X(w_0), X(w_1))$ относительно $\mathscr{K}$-монотонны с константой $\lambda > 0$, не зависящей от v_0, v_1, w_0, w_1;

(ii) $X = L_p(v)$ (нормы эквивалентны) для некоторого «веса» v и некоторого $p \in [1, \infty)$.

Здесь нас будут интересовать банаховы пары, $\mathscr{K}$-монотонность которых устойчива относительно более слабого «возмущения» — умножения «веса» на константу. А именно, предположим, что (X_0, X_1) — пара банаховых решеток измеримых функций, определенных на некотором пространстве с σ-конечной мерой. Будут ли пары $(X_0, X_1(u))$ и (X_0, X_1) относительно $\mathscr{K}$-монотонны с некоторой константой $\lambda > 0$, не зависящей от числа $u > 0$? Как известно (см., например, [5, п. 15] или [1]), ответ на поставленный вопрос положителен тогда и только тогда, когда для некоторого $\lambda > 0$ выполнено следующее условие: для произвольных $x, y \in X_0 + X_1$, $\lambda' > \lambda$ и $u > 0$ из неравенства $\mathscr{K}(t, y; X_0, X_1) \leqslant \mathscr{K}(ut, x; X_0, X_1)$ $(t > 0)$ вытекает существование такого линейного оператора $T\colon X_i \to X_i$ $(i = 0, 1)$, что $\|T\|_{X_0 \to X_0} \leqslant \lambda'$, $\|T\|_{X_1 \to X_1} \leqslant \lambda' u$ и $Tx = y$. В том случае, когда пара (X_0, X_1) удовлетворяет последнему условию, будем называть ее *$\mathscr{K}_u$-монотонной*. Заметим, что это понятие имеет смысл и для общих банаховых пар. В частности, этим свойством обладают пары пространств классического метода интерполяции $(\vec{X}_{\theta_0,p_0}, \vec{X}_{\theta_1,p_1})$, порожденные l_p-пространствами со степенными весами (определения см. в [6]).

Предложение 1. *Для произвольной банаховой пары* $\vec{X} = (X_0, X_1)$ *и любых* θ_j, p_j $(0 < \theta_j < 1,\ 1 \leqslant p_j \leqslant \infty,\ j = 1,2)$ *пара* $(\vec{X}_{\theta_0,p_0}, \vec{X}_{\theta_1,p_1})$ *является* $\mathscr{K}_u$*-монотонной.*

3. Пары, порожденные банаховой решеткой, инвариантной относительно сдвига. Предположим, что в банаховой решетке E двусторонних числовых последовательностей для любого $k \in \mathbb{Z}$ ограничен оператор сдвига $P_k((a_j)_{j=-\infty}^{\infty}) := (a_{k+j})_{j=-\infty}^{\infty}$. Будем называть решетку E инвариантной относительно сдвига, если $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|P_k\|_{E\to E} < \infty$. Пусть E_θ — банахова решетка $E(2^{-\theta k})$ $(0 < \theta < 1)$.

Теорема 1. *Для произвольной сепарабельной банаховой решетки E двусторонних числовых последовательностей, такой, что* $\|e_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{Z})$, *следующие условия эквивалентны*:

(a) *пара* $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$ $\mathscr{K}_u$*-монотонна*;

(b) *пара* $\vec{E}$ $\mathscr{K}$*-монотонна и существует константа* $C > 0$ *со следующим свойством*: *если* $\theta \in (0,1)$ *и* $a \in E_\theta$, $b \in E + E(2^{-k})$, $u > 0$ *удовлетворяют неравенству*

$$\mathscr{K}(t, b; \vec{E}) \leqslant \mathscr{K}(ut, a; \vec{E}) \qquad (t > 0), \tag{1}$$

то $b \in E_\theta$ *и*

$$\|b\|_{E_\theta} \leqslant C u^\theta \|a\|_{E_\theta}; \tag{2}$$

(c) *пара* $\vec{E}$ $\mathscr{K}$*-монотонна и существуют такие* $C > 0$ *и* $\theta_0 \in (0,1)$, *что если* $a \in E_{\theta_0}$, $b \in E + E(2^{-k})$, $u > 0$ *удовлетворяют неравенству* (1), *то* $b \in E_{\theta_0}$ *и соотношение* (2) *выполнено для* $\theta = \theta_0$;

(d) *пара* $\vec{E}$ $\mathscr{K}$*-монотонна и* E *инвариантна относительно сдвига.*

Последний результат позволяет привести примеры $\mathscr{K}$-монотонных, но не $\mathscr{K}_u$-монотонных банаховых пар. Возьмем в качестве G любую банахову решетку последовательностей со следующими свойствами: a) G сепарабельна; b) $\|e^k\|_G = 1$; c) G обладает свойствами (LSP) и (RSP); d) G не инвариантна относительно сдвига. Тогда банахова пара $(G, G(2^{-k}))$ $\mathscr{K}$-монотонна и не $\mathscr{K}_u$-монотонна. Примерами решеток с перечисленным набором свойств являются прямая сумма $l_q(\mathbb{Z}_-) \oplus l_r(\mathbb{Z}_+)$ $(1 \leqslant q \neq r < \infty)$ с естественной нормой, а также пространство Цирельсона T [7].

В связи с этим возникает естественный вопрос о существовании сепарабельной инвариантной относительно сдвига банаховой решетки, обладающей свойствами (RSP) и (LSP) и отличной от l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ и c_0. Ввиду результатов работы [2], а также теоремы 1 его можно переформулировать следующим образом: существует ли $\mathscr{K}_u$-монотонная пара вида $(E, E(2^{-k}))$, где E — сепарабельная банахова решетка, $\|e_n\|_E = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $E \neq l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $E \neq c_0$? Последний вопрос интересен также в связи с известным результатом Калтона [2, теорема 4.6] о том, что в случае, когда E — симметричная банахова решетка, такая пара $\mathscr{K}$-монотонна, лишь если $E = l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или $E = c_0$. В последнем разделе работы речь пойдет о таком примере, интересном, как мы надеемся, также и в других отношениях.

4. Банахова решетка, инвариантная относительно сдвига, со свойствами (RSP) и (LSP). В следующих построениях используются идеи конструкции пространства Цирельсона, предложенной Фигелем и Джонсоном (см. [7] или [8]). Одновременно имеются и существенные отличия нашего примера от упомянутого, связанные, прежде всего, с тем, что нам нужно было построить пространство, инвариантное относительно сдвига (пространство Цирельсона этим свойством не обладает).

Разбиением будем называть произвольный набор $c = \{c[j]\}_{j=1}^{p}$ отрезков $c[j] = \{k \in \mathbb{Z} : a_j \leqslant k \leqslant a_{j+1} - 1\}$, где $a_j \in \mathbb{Z}$, $a_{j+1} > a_j$ для всех $j = 1, \dots, p$. Разбиение c будем называть *допустимым*, если $\operatorname{card}\{j : \operatorname{card} c[j] \leqslant k\} \leqslant 14k$ для любого $k > 0$. Множество всех допустимых разбиений обозначим через $\mathscr{A}$.

Определим последовательность норм $\{\|\cdot\|_m\}_{m=0}^{\infty}$ на пространстве финитных векторов c_{00}. Если $x = \sum_n \alpha_n e_n \in c_{00}$, то

$$\|x\|_0 = \max_n |\alpha_n|,$$

$$\|x\|_{m+1} = \max\left(\|x\|_m, \frac{1}{2}\max_{c\in\mathscr{A}} \sum_{j=1}^{\operatorname{card} c} \|x\chi_{c[j]}\|_m\right), \qquad m \geqslant 0,$$

где χ_E —характеристическая функция множества E. Тогда c_{00} с нормой $\|\cdot\|_m$ является нормированной решеткой, инвариантной относительно сдвига, и $\|x\|_{c_0} \leqslant \|x\|_m \leqslant \|x\|_{l_1}$ $(x \in c_{00})$. Поскольку $\|x\|_{m+1} \geqslant \|x\|_m$ для любого x, существует предел $\|x\|_{\mathscr{A}} = \lim_{m\to\infty} \|x\|_m$. Пополнение пространства c_{00} по норме $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$ обозначим через F. Нетрудно показать, что для любого $x \in F$

$$\|x\|_{\mathscr{A}} = \max\left(\|x\|_{c_0}, \frac{1}{2}\sup_{c\in\mathscr{A}} \sum_{j=1}^{\operatorname{card} c} \|x\chi_{c[j]}\|_{\mathscr{A}}\right).$$

Теорема 2. *Банахова решетка F сепарабельна, инвариантна относительно сдвига, обладает свойствами* (RSP), (LSP) *и не совпадает с l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ и c_0.*

Следствие 1. *Банахова пара $(F, F(2^{-k}))$ $\mathscr{K}_u$-монотонна, но не является равномерным частичным ретрактом никакой весовой L_p-пары.*

Литература

[**1**] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, 1, North-Holland, Amsterdam, 1991. [**2**] N. J. Kalton, Studia Math., **106**:3 (1993), 233–277. [**3**] M. Cwickel, P. Nilsson, in: Interpolation Spaces and Allied Topics in Analysis (Lund, 1984), Lecture Notes in Math., vol. 1070, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 54–65. [**4**] А. А. Седаев, Докл. АН СССР, **209**:4 (1973), 798–800. [**5**] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, в кн.: Геометрия линейных пространств и теория операторов, Ярослав. гос. ун-т, Ярославль, 1977, 31–74. [**6**] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980. [**7**] P. G. Casazza, T. J. Shura, *Tsirelson's Space*, Lecture Notes in Math., vol. 1363, Springer-Verlag, Berlin, 1989. [**8**] T. Figiel, W. B. Johnson, Compositio Math., **29** (1974), 179–190.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru
Самарский госуниверситет
e-mail: ktikhomirov@yandex.ru

Поступило в редакцию
18 сентября 2008 г.

Аннотация

Изучаются $\mathscr{K}$-монотонные банаховы пары, обладающие определенной устойчивостью при умножении нормы на константу. Предположим, что E — сепарабельная банахова решетка двусторонних числовых последовательностей, такая, что $\|e_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, где $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — стандартный базис. Показано, что пара $\vec{E} = (E, E(2^{-k}))$ устойчиво $\mathscr{K}$-монотонна, если и только если E инвариантна относительно сдвига. Построен пример нетривиальной инвариантной относительно сдвига сепарабельной банаховой решетки E, такой, что пара $\vec{E}$ $\mathscr{K}$-монотонна. Последнее контрастирует с известной теоремой Калтона о том, что если сепарабельная банахова решетка E симметрична и пара $\vec{E}$ $\mathscr{K}$-монотонна, то $E = l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или $E = c_0$.