Функциональный анализ и его приложения
2009, т. 43, вып. 2, с. 3–18

УДК 517.5+517.982

Оператор Круглова и операторы, определяемые случайными перестановками*

© 2009. С. В. Асташкин, Д. В. Занин, Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев

Свойство и оператор Круглова играют важную роль при изучении геометрических свойств r. i. пространств. В работе доказано, что ограниченность оператора Круглова в r. i. пространстве эквивалентна равномерной ограниченности в этом пространстве операторов, порожденных случайными перестановками. Показано также, что не существует минимального r. i. пространства со свойством Круглова.

§1. Введение

Пусть f — случайная величина (измеримая функция), определенная на $[0,1]$. Обозначим через $\pi(f)$ случайную величину на $[0,1]$ с тем же распределением, что и у $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i — независимые копии случайной величины f, а N — пуассоновская случайная величина с параметром 1, независимая от последовательности $\{f_i\}$.

Определение. Говорят, что r. i. пространство E на $[0,1]$ (определение см. в §2) обладает *свойством Круглова* ($E \in \mathbb{K}$), если

$$f \in E \iff \pi(f) \in E.$$

Это свойство было введено и изучалось Браверманом [1], использовавшим при этом некоторые вероятностные конструкции и идеи Круглова [2]. В [3] (см. также [4]) для его изучения был предложен операторный подход.

Пусть $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых попарно не пересекающихся подмножеств отрезка $[0,1]$ и $\operatorname{mes} B_n = 1/(e\,n!)$ (mes — мера Лебега на $[0,1]$). Если $f \in L_1[0,1]$, то

$$Kf(\omega_0, \omega_1, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k) \chi_{B_n}(\omega_0); \tag{1}$$

здесь и всюду далее χ_B — характеристическая функция множества B. Тогда K — положительный линейный оператор, $K\colon L_1[0,1] \to L_1(\Omega, P)$, где $(\Omega, P) = \prod_{n=0}^{\infty}([0,1], \operatorname{mes})$. Так как распределения случайных величин Kf и $\pi(f)$ одинаковы [3], то Kf можно рассматривать как явное представление случайной величины $\pi(f)$. Поэтому, в частности, r. i. пространство E обладает свойством Круглова тогда и только тогда, когда K действует (ограниченным образом) из E в $E(\Omega, P)$ [3].

*Первый автор частично поддержан грантом РФФИ №07-01-96603; третий автор частично поддержан грантом РФФИ №08-01-00226-а; четвертый автор частично поддержан Австралийским научным советом.

Через Kf мы также будем обозначать другую случайную величину, определенную на $[0,1]$ и имеющую то же распределение, что и величина, введенная формулой (1) (см. [3]). Обозначим через f^* перестановку функции $|f|$ в убывающем порядке, т. е. $f^*(t)$ не возрастает на $[0,1]$ и равноизмерима с $|f(t)|$. Если $f \in L_1[0,1]$, $\{B_n\}$ — указанная выше последовательность подмножеств отрезка $[0,1]$ и $f_{n,1},\dots,f_{n,n}$, χ_{B_n} — набор независимых функций для каждого $n \in \mathbb{N}$, такой, что $f^*_{n,k} = f^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k = 1,\dots,n$, то $Kf(t)$ определяется как некоторая перестановка функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{n,k}(t)\chi_{B_n}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{2}$$

Подчеркнем, что K — это линейный оператор, действующий из пространства $L_1[0,1]$ в пространство $L_1(\Omega,P)$. Когда мы говорим, что K ограничен в r. i. пространстве X на $[0,1]$, то эта ограниченность понимается как ограниченность линейного отображения K из пространства $X[0,1]$ в пространство $X(\Omega,P)$. Из определений оператора K и r. i. пространства сразу следует (см. также [1, 1.6, с. 11]), что $\|Kf\|_E \geqslant e^{-1}\|f\|_E$ $(f \in E)$ для любого r. i. пространства E. В [3] было показано, что оператор K играет важную роль при получении оценок норм сумм независимых функций через нормы сумм их дизъюнктных копий (эти оценки имеют многочисленные применения). На этом пути в [3] было найдено усиление известных результатов Джонсона и Шехтмана [5].

Хорошо известно (см., например, [2] или [1]), что пространство Орлича $\exp L_1$, построенное по функции $e^t - 1$, обладает свойством Круглова. Отсюда следует, что то же самое верно и для его сепарабельной части $(\exp L_1)_0$ (определения см. ниже). Действительно, так как K ограничен в $\exp L_1$, то $K((\exp L_1)_0) \subset \overline{K(L_\infty)}$ (замыкание берется относительно нормы в $\exp L_1$). Одновременно $K(L_\infty) \subset (\exp L_1)_0$ [3, теорема 4.4]. Следовательно, ввиду замкнутости множества $(\exp L_1)_0$ в $\exp L_1$ оператор K ограничен в $(\exp L_1)_0$. Заметим, что для всех известных до сих пор r. i. пространств E со свойством Круглова имело место вложение $E \supset (\exp L_1)_0$. Это, а также некоторые результаты работы [3] (см. теорему 7.2) делали весьма правдоподобной гипотезу о том, что $(\exp L_1)_0$ — минимальное среди r. i. пространств со свойством Круглова. Тем не менее в первой части работы мы покажем, что это неверно. Более того, будет доказано, что для всякого r. i. пространства $E \in \mathbb{K}$ существует пространство Марцинкевича $M_\psi \subsetneq X$, также обладающее свойством Круглова (следствие 3). В определенном смысле совершенно иначе обстоит дело с обладающими свойством Круглова пространствами Лоренца: любое такое пространство содержит $\exp L_1$ (теорема 4).

Квапень и Шютт в работе [6] исследовали свойства случайных перестановок, применив их затем к изучению геометрии банаховых пространств. Операторный подход к этим вопросам был развит в работах [7] и [8] и позволил обобщить результаты Квапеня и Шютта. Там было введено следующее семейство операторов. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и S_n — множество перестановок чисел $1,\dots,n$. Отождествим S_n с множеством $\{1,\dots,n!\}$ (произвольным образом) и определим сначала оператор A_n, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n!}$: если $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ и π — произвольная перестановка из S_n, то компонента вектора $A_n x$, соответствующая перестановке π (отождествляемой с элементом множества $\{1,\dots,n!\}$), определяется по формуле

$$(A_n x)_\pi := \sum_{i:\,\pi(i)=i} x_i\,. \tag{3}$$

Для функции $x(t)\in L_1[0,1]$ определим вектор $B_n x$ длины n с координатами $(B_n x)_i = n\int_{(i-1)/n}^{i/n} x(t)\,dt$, $i=1,\dots,n$. Оператор B_n имеет правый обратный C_n ($B_n C_n x = x$ для $x\in\mathbb{R}^n$), сопоставляющий каждому вектору длины n функцию, постоянную на отрезках $[(i-1)/n, i/n]$. Наконец, определим оператор

$$T_n = C_{n!} A_n B_n.$$

Ясно, что T_n для каждого $n\in\mathbb{N}$ — линейный положительный оператор, действующий из $L_1[0,1]$ в пространство ступенчатых функций. Нетрудно показать также, что

$$\|T_n x\|_{L_1} = \|x\|_{L_1} \tag{4}$$

для всех $x\in L_1[0,1]$, $x\geqslant 0$. Через T_n мы будем также иногда обозначать оператор $C_{n!}A_n$, определенный аналогичным образом на $\mathbb{R}^n$ (это не приведет к недоразумению). Если $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и E — произвольное r. i. пространство на $[0,1]$, то $\|x\|_E$ понимается как

$$\|C_n x\|_E = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{\left(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)}\right\|_E.$$

В работе [8] было доказано, что равномерная ограниченность операторов, порожденных случайными перестановками, на множестве квадратных матриц сводится к аналогичному свойству операторов T_n. Одновременно обнаружилось интересное обстоятельство: несмотря на внешнее отсутствие какой-либо связи между операторами K и T_n, критерии ограниченности оператора K и равномерной ограниченности операторов T_n ($n\in\mathbb{N}$) в пространстве Лоренца Λ_φ, найденные в [3] и [8] соответственно, оказались одинаковыми. А именно, оба они состоят в выполнении одного и того же условия:

$$M := \sup_{0<t\leqslant 1}\frac{1}{\varphi(t)}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{t^k}{k!}\right) < \infty. \tag{5}$$

В связи с этим возникла гипотеза о том, что ограниченность оператора K в произвольном r. i. пространстве E также эквивалентна условию $\sup_n\|T_n\|_E<\infty$. Вторая часть работы посвящена доказательству этого утверждения. Оно основано на комбинаторных рассуждениях и связано с получением оценок для соответствующих функций распределения. Доказанный результат приводит к ряду полезных следствий как для оператора K, так и для операторов T_n. В частности, следствие 13 показывает (уточняя теорему 19 из [8]), что равномерная ограниченность операторов T_n в экспоненциальных пространствах Орлича $\exp L_p$ эквивалентна тому, что $p\leqslant 1$.

Авторы выражают благодарность рецензенту, предложения и замечания которого позволили улучшить окончательный текст статьи, в частности, упростить определение операторов T_n и доказательство леммы 7.

§2. Определения и обозначения

Банахово пространство E измеримых на $[0,1]$ функций называется *перестановочно-инвариантным*, или *симметричным*, или r. i. *пространством*, если

1) из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для $t \in [0,1]$ и $y \in E$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости функции x и функции $y \in E$, т. е. равенства

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,1] : |x(t)| > \tau\} = \operatorname{mes}\{t \in [0,1] : |y(t)| > \tau\} \qquad (\tau > 0),$$

следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Для любого r. i. пространства E имеют место непрерывные вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$ и, если $\|\chi_{(0,1)}\|_E = 1$, то $\|x\|_{L_1} \leqslant \|x\|_E \leqslant \|x\|_{L_\infty}$ $(x \in L_\infty)$. Для каждого $\tau > 0$ оператор растяжения $\sigma_\tau x(t) := x(t/\tau) \cdot \chi_{[0,\min(1,\tau)]}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ ограничен в E и $\|\sigma_\tau\|_E \leqslant \max(1,\tau)$.

Пространство E' измеримых функций x на $[0,1]$, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \leqslant 1} \int_0^1 x(t)y(t)\,dt < \infty,$$

называется двойственным к E пространством; оно также является r. i. пространством. Следуя [9, 2.a.1], мы будем предполагать, что E сепарабельно или совпадает со своим вторым двойственным пространством E''. Тогда E'' в обоих случаях содержит E как замкнутое подпространство и вложение $E \subset E''$ изометрично. Если E сепарабельно, то E' совпадает с сопряженным пространством E^*. Через E_0 будет обозначаться сепарабельная часть r. i. пространства E, т. е. замыкание в E пространства L_∞. Пространство E_0 совпадает с L_∞, если и только если $E = L_\infty$. В случае когда $E \neq L_\infty$, E_0 является сепарабельным r. i. пространством.

Напомним, что слабая сходимость распределений измеримых на $[0,1]$ функций $x_n(t)$ к распределению функции $x(t)$ $(x_n \Rightarrow x)$ означает, что для любой непрерывной и ограниченной на $(0,\infty)$ функции $y(t)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,d\operatorname{mes}\{s : x_n(s) < t\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,d\operatorname{mes}\{s : x(s) < t\}.$$

Если E есть r. i. пространство, $x_n \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_E = C < \infty$ и $x_n \Rightarrow x$, то $x \in E''$ и $\|x\|_{E''} \leqslant C$ [1, предложение 1.5].

На множестве суммируемых функций вводится отношение полуупорядоченности $\prec$, играющее важную роль в теории r. i. пространств. Мы будем писать $x \prec y$, если

$$\int_0^\tau x^*(t)\,dt \leqslant \int_0^\tau y^*(t)\,dt$$

для всех $\tau \in [0,1]$. Здесь и далее $x^*(t)$ — невозрастающая непрерывная слева перестановка функции $|x(t)|$, т. е.

$$x^*(t) = \inf\{\tau \geqslant 0 : \operatorname{mes}\{s \in [0,1] : |x(s)| > \tau\} < t\} \qquad (0 < t \leqslant 1).$$

Если $x \prec y$ и y принадлежит некоторому r. i. пространству E, то $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$.

Приведем наиболее важные примеры r. i. пространств. Если $M(u)$ — возрастающая выпуклая на $[0,\infty)$ функция, $M(0)=0$, то через L_M будет обозначаться пространство Орлича с нормой

$$\|x\|_{L_M}=\inf\left\{\lambda>0:\int_0^1 M\left(\frac{|x(t)|}{\lambda}\right)dt\leqslant 1\right\}.$$

Функция $M_p(u)=e^{u^p}-1$ выпукла при $p\geqslant 1$ и эквивалентна некоторой выпуклой функции при $0<p<1$. Пространство L_{M_p} будет обозначаться через $\exp L_p$.

Если $\varphi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, $\varphi(0)=0$, то Λ_φ — пространство Лоренца с нормой

$$\|x\|_{\Lambda_\varphi}=\int_0^1 x^*(t)\,d\varphi(t),$$

а M_φ — пространство Марцинкевича с нормой

$$\|x\|_{M_\varphi}=\sup_{0<t\leqslant 1}\frac{1}{\varphi(t)}\int_0^t x^*(s)\,ds.$$

Все изложенные выше сведения о r. i. пространствах содержатся в монографиях [9], [10].

Всюду далее $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f, т. е. множество $\{t:\ f(t)\neq 0\}$. Кроме того, мы пишем $F\asymp G$, если $C^{-1}F\leqslant G\leqslant CF$, где константа $C>0$ не зависит от аргументов величин F и G. И наконец, через $|A|$ будет обозначаться количество элементов конечного множества A.

§ 3. Пространства Марцинкевича и Лоренца «вблизи» $\exp L_1$

Теорема 1. *Существует такое семейство пространств Марцинкевича* $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{0<\varepsilon<1}$, *что* $M_{\psi_\varepsilon}\subset M_{\psi_\delta}$ *для всех* $0<\varepsilon\leqslant\delta<1$ *и что*

1) $M_{\psi_\varepsilon}\in\mathbb{K}$, $0<\varepsilon<1$;

2) $M_{\psi_\varepsilon}\subset E$ *для каждого r. i. пространства* $E\in\mathbb{K}$ *и всех достаточно малых* ε;

3) *функции* ψ_ε *попарно не эквивалентны, точнее,*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\psi_\varepsilon(t)}{\psi_\delta(t)}=0,\quad \text{если } 0<\varepsilon<\delta<1; \tag{6}$$

4) $M_{\psi_\varepsilon}\subsetneqq(\exp L_1)_0$ *для достаточно малых* $\varepsilon>0$.

Для доказательства нам потребуется следующее простое утверждение.

Лемма 2. *Для произвольной функции* $f\in L_1[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{mes}(\operatorname{supp}K^n f)=0.$$

Доказательство. Так как оператор K положителен, можно считать, что $f\geqslant 0$ и что $\operatorname{mes}(\operatorname{supp} f)=1$. Тогда если $a_n:=\operatorname{mes}\{t:K^nf(t)=0\}$ $(n\in\mathbb{N})$, то по определению оператора K (см. соотношение (2)) $a_1=1/e$ и

$$a_{n+1}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_n^k}{k!}=e^{a_n-1}\qquad(n=1,2,\dots).$$

Легко видеть, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает и $a_n \in (0,1)$. Так как $f(x) := e^{x-1} - x$ убывает на $[0,1]$, то функция e^{x-1} имеет на этом отрезке единственную неподвижную точку $x = 1$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, и утверждение доказано. □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функции $h_n = (K^n 1)^*$, $n \geqslant 0$. Так как оператор K переводит равноизмеримые функции в равноизмеримые, то

$$(Kh_n)^* = h_{n+1}. \tag{7}$$

Далее, по лемме 2 $\operatorname{mes}(\operatorname{supp} h_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, ряд

$$g_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n \tag{8}$$

сходится всюду на $(0,1]$ для каждого $\varepsilon > 0$, а функция g_ε убывает. Кроме того, из определения оператора K (см. (2)) следует, что $\|K\|_{L_1} = 1$. Поэтому если $0 < \varepsilon < 1$, то ряд (8) сходится в L_1 и $g_\varepsilon \in L_1$. Покажем теперь, что утверждения теоремы справедливы для семейства $\{M_{\psi_\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$, где $\psi_\varepsilon(t) = \int_0^t g_\varepsilon(s)\,ds$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

1. Докажем, что оператор K ограничен в M_{ψ_ε}. Так как крайние точки единичного шара в этом пространстве равноизмеримы с функцией g_ε [11], то для этого достаточно показать, что $Kg_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$. Ввиду ограниченности оператора K в L_1

$$Kg_\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n K h_n \prec \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_{n+1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n h_n = \frac{1}{\varepsilon}\, g_\varepsilon,$$

где первое неравенство вытекает из (7) и хорошо известного свойства полуупорядоченности Харди–Литтлвуда (см., например, [10, § 2.2]). Отсюда следует, что $Kg_\varepsilon \in M_{\psi_\varepsilon}$.

2. Предположим теперь, что $E \in \mathbb{K}$. Тогда, как уже отмечалось, $C = \|K\|_{E\to E} < \infty$. Очевидно, что $\|h_n\|_E \leqslant C^n \|1\|_E$. Следовательно, для всех $\varepsilon < C^{-1}$ ряд (8) сходится в E и $g_\varepsilon \in E$. Кроме того, так как пространство E сепарабельно или $E = E''$, то из $x \in E$ и $y \prec x$ следует, что $y \in E$ и $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$. Таким образом, вместе с g_ε весь единичный шар пространства Марцинкевича M_{ψ_ε} содержится в E, откуда вытекает, что $M_{\psi_\varepsilon} \subset E$.

3. Пусть, как и ранее, функция g_ε определяется соотношением (8) и $0 < \varepsilon < \delta$. Так как в силу доказательства теоремы 7.2 в [3]

$$\lim_{t\to 0} \frac{h_{n+1}(t)}{h_n(t)} = \infty,$$

то для любого $m = 1, 2, \dots$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{g_\varepsilon(t)}{g_\delta(t)} = \limsup_{t\to 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t)\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n h_n(t)\right)^{-1} = \cdots$$

$$= \limsup_{t\to 0} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon^n h_n(t)\right) \cdot \left(\sum_{n=m}^{\infty} \delta^n h_n(t)\right)^{-1} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^m.$$

Таким образом, $\lim_{t\to 0} g_\varepsilon(t)/g_\delta(t) = 0$, откуда следует (6).

4. Как уже говорилось во введении, K ограниченно действует в пространстве $(\exp L_1)_0$. Поэтому достаточно применить уже доказанные второе и третье утверждения. $\square$

Пусть $\varphi_n(t) = \int_0^t h_n(s)\,ds$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и M_{φ_n} — пространство Марцинкевича, порожденное этой функцией. Тогда $M_{\varphi_n} \subset M_{\varphi_{n+1}} \subset (\exp L_1)_0$ $(n = 1, 2, \dots)$, и в определенном смысле пространства M_{φ_n} можно считать «приближениями» пространства $(\exp L_1)_0$. В работе [3] (см. теорему 7.2) доказано, что для любого r. i. пространства $E \in \mathbb{K}$ и всех $n = 1, 2, \dots$ имеет место вложение $M_{\varphi_n} \subset E$. В связи с этим возникла гипотеза о том, что $(\exp L_1)_0$ — наименьшее среди r. i. пространств со свойством Круглова. Тем не менее следующее утверждение, вытекающее из только что доказанной теоремы, показывает, что эта гипотеза не верна.

Следствие 3. *Для любого r. i. пространства $E \in \mathbb{K}$ существует такое r. i. пространство $F \in \mathbb{K}$, что $F \subsetneqq E$.*

Покажем, что в отличие от пространств Марцинкевича все пространства Лоренца со свойством Круглова лежат «по одну сторону» от $\exp L_1$.

Теорема 4. *Пусть φ — возрастающая вогнутая на $[0,1]$ функция, $\varphi(0) = 0$. Если $\Lambda_\varphi \in \mathbb{K}$, то $\Lambda_\varphi \supset \exp L_1$.*

Здесь мы также начнем с леммы.

Лемма 5. *Если возрастающая вогнутая на $[0,1]$ функция φ, $\varphi(0) = 0$, удовлетворяет условию (5), то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}) \leqslant A\varphi(1), \tag{9}$$

где $A > 0$ зависит лишь от константы M из (5).

Доказательство. Ввиду (5) для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-ij} j^{-j}) \leqslant M\varphi(2^{-i})$$

или

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j(i+[\log_2 j])}) \leqslant M\varphi(2^{-i}). \tag{10}$$

Прямые оценки показывают, что величина

$$\alpha_n := |\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : j(i + [\log_2 j]) \leqslant n\}|$$

удовлетворяет соотношению $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/n = 0$. Поэтому $\alpha_n \geqslant (M+1)n$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и всех $n \geqslant m$. Так как функция φ возрастает, то отсюда и из (10) для произвольного $l > m$ следует

$$(M+1)\sum_{n=m}^{l} \varphi(2^{-n}) \leqslant \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(2^{-j(i+[\log_2 j])}) \leqslant M\sum_{i=1}^{l} \varphi(2^{-i}),$$

откуда

$$\sum_{n=m}^{l} \varphi(2^{-n}) \leqslant M\sum_{i=1}^{m-1} \varphi(2^{-i}).$$

Неравенство (9) является теперь непосредственным следствием того, что $l > m$ произвольно, а m не зависит от φ. $\square$

Доказательство теоремы 4. Как уже отмечалось во введении, условие $\Lambda_\varphi \in \mathbb{K}$ эквивалентно соотношению (5) [3]. Поэтому по только что доказанной лемме выполнено неравенство (9). Кроме того, ввиду [12]

$$\|x\|_{\exp L_1} \asymp \sup_{0<t\leqslant 1} x^*(t)\log_2^{-1}(2/t),$$

и, значит, для доказательства вложения $\Lambda_\varphi \supset \exp L_1$ достаточно показать, что $\log_2(2/t) \in \Lambda_\varphi$. Но последнее вытекает из оценок

$$\begin{aligned}\|\log_2(2/t)\|_{\Lambda_\varphi} &= \int_0^1 \log_2(2/t)\,d\varphi(t) = \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \log_2(2/t)\,d\varphi(t)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^\infty (k+1)(\varphi(2^{-k+1}) - \varphi(2^{-k})) = 2\varphi(1) + \sum_{k=1}^\infty \varphi(2^{-k}) < \infty. \quad \square\end{aligned}$$

§4. Оценки функций распределения

Далее для нас будет полезна следующая аппроксимация функции Kf, где f — произвольная измеримая функция на $[0,1]$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $g_m(t) = \sigma_{1/m}f(t)$ и $\{h_{m,i}\}_{i=1}^m$ — набор независимых функций, равноизмеримых с функцией g_m. Тогда последовательность

$$H_m f(t) = \sum_{i=1}^m h_{m,i}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{11}$$

при $m \to \infty$ слабо сходится (в смысле сходимости распределений) к Kf (см. [1, 1.6, с. 11]) или [3, теорема 3.5].

В частности, если $n \in \mathbb{N}$, $a_k \geqslant 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{12}$$

то

$$g_m(t) = \sigma_{\frac{1}{m}} f_a(t) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{(\frac{k-1}{nm},\frac{k}{nm})}(t) \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

В этом случае мы положим

$$H_m a(t) := H_m f_a(t) = \sum_{i=1}^m h_{m,i}(t). \tag{13}$$

Кроме того, через $\mathrm{Ch}(r)$ будет обозначаться число перестановок π множества $\{1,\dots,r\}$, таких, что $\pi(i) \neq i$ для всех $i = 1,\dots,r$. Как известно (см., например, [13, с. 20]),

$$\frac{1}{3}\,r! \leqslant \mathrm{Ch}(r) \leqslant r! \qquad (r \in \mathbb{N}). \tag{14}$$

Сравним сначала функции $H_m a$ и $T_{nm} b$, где

$$b = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m}, \dots, \underbrace{a_n, \dots, a_n}_{m}).$$

Лемма 6. *Для любых* $n, m \in \mathbb{N}$ *и* $\tau > 0$

$$\operatorname{mes}\{t : H_m a(t) > \tau\} \leqslant 3 \operatorname{mes}\{t : T_{nm} b(t) > \tau\}.$$

Доказательство. Функция $H_m a(t)$ (соответственно $T_{nm} b(t)$) принимает лишь значения вида $\sum_{i=1}^n k_i a_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^n k_i \leqslant m$ (соответственно $\sum_{i=1}^n k_i \leqslant mn$). Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\operatorname{mes}\left\{t : H_m a(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} \leqslant 3 \operatorname{mes}\left\{t : T_{nm} b(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\}$$

для любого набора $k_i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n k_i = q \leqslant m$. Заметим также, что достаточно рассмотреть случай, когда

$$\sum_{i=1}^n k_i a_i \neq \sum_{i=1}^n k_i' a_i \text{ при условии, что } (k_1, \dots, k_n) \neq (k_1', \dots, k_n').$$

Поэтому $H_m a(t)$ равна сумме $\sum_{i=1}^n k_i a_i$ лишь тогда, когда ровно k_i (соответственно $m - q$) из функций $h_{m,j}(t)$ $(j = 1, \dots, m)$ обращаются в a_i (соответственно в 0). Так как $h_{m,j}$ попарно независимы, то

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\left\{t : H_m a(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} &= C_m^{m-q, k_1, \dots, k_n} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m-q} \left(\frac{1}{mn}\right)^{k_1 + \dots + k_n} \\ &\leqslant C_m^{m-q, k_1, \dots, k_n} \left(\frac{1}{mn}\right)^q, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$C_m^{m-q, k_1, \dots, k_n} = \frac{m!}{(m-q)!\, k_1! \cdots k_n!}\,.$$

С другой стороны, ввиду (3) и (14)

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\left\{t : T_{mn} b(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} &= C_m^{k_1} \cdots C_m^{k_n} \operatorname{Ch}(mn - q) \frac{1}{(mn)!} \\ &\geqslant \frac{(m!)^n (mn-q)!}{3 (m-k_1)! \cdots (m-k_n)!\, k_1! \cdots k_n!\, (mn)!}\,. \end{aligned}$$

Так как $(m-k_1)! \cdots (m-k_n)! \leqslant (m!)^{n-1} (m-q)!$ и $(mn-q)!/(mn)! \geqslant 1/(mn)^q$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\left\{t : T_{mn} b(t) = \sum_{i=1}^n k_i a_i\right\} &\geqslant \frac{m!\, (mn-q)!}{3 k_1! \cdots k_n!\, (m-q)!\, (mn)!} \\ &\geqslant \frac{m!}{3 (m-q)!\, k_1! \cdots k_n!} \cdot \frac{1}{(mn)^q}\,. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (15) следует утверждение леммы. □

Лемма 7. *Если* $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $k \leqslant n$, *то*

$$\frac{(n-k)!}{n!} \leqslant 2\,\frac{(k-1)!}{n^k}\,.$$

Доказательство. Так как $j(n-j) > n$ при $2 \leqslant j \leqslant n-2$, то

$$\frac{n^k(n-k)!}{n!\,(k-1)!} = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n}{j(n-j)} \leqslant \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 < 2. \qquad \square$$

Продолжим начатое в лемме 6 изучение взаимосвязей между функциями распределения случайных величин $T_n a$ и $H_m a$ (см. соотношения (3) и (13)). В отличие от оценки, доказанной в лемме 6 для любых m, n, противоположное неравенство можно получить только асимптотически при $m \to \infty$.

Лемма 8. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \geqslant 0$ *и* $\tau > 0$. *Тогда для достаточно больших* $m \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leqslant 12 \operatorname{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\}.$$

Доказательство. Предполагая сначала, что $n \geqslant 4$, введем следующие обозначения: $A = \{1, \dots, n\}$ и $S(U) := \sum_{j \in U} a_j$ для произвольного $U \subset A$. Без ограничения общности можно считать, что $n = 2s$ ($s \in \mathbb{N}$), $a_i > 0$ и $S(U_1) \neq S(U_2)$, если $U_1 \neq U_2$. Кроме того, пусть $\mathscr{A}_i$ — семейство всех $U \subset A$, таких, что $|U| = i$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^n \mathscr{A}_i$ состоит из всех непустых подмножеств множества A. Представим семейство $\mathscr{A}$ несколько иначе.

Пусть $U \in \mathscr{A}_k$ для некоторого $k = 1, \dots, s$. Рассмотрим семейство $\mathscr{A}_U$ (соответственно $\mathscr{B}_U$), состоящее из всех множеств $V \subset A$, таких, что $V \supset U$, $V \in \mathscr{A}_{2k}$ (соответственно $V \in \mathscr{A}_{2k-1}$) и $S(V \setminus U) \leqslant S(U)$. Так как

$$\bigcup_{U \in \mathscr{A}_k} \mathscr{A}_U = \mathscr{A}_{2k} \quad \text{и} \quad \bigcup_{U \in \mathscr{A}_k} \mathscr{B}_U = \mathscr{A}_{2k-1} \qquad (k = 1, \dots, s),$$

то

$$\mathscr{A} = \bigcup_{k=1}^{s} \bigcup_{U \in \mathscr{A}_k} (\mathscr{A}_U \cup \mathscr{B}_U). \tag{16}$$

Из определения семейств $\mathscr{A}_U$ и $\mathscr{B}_U$ следует также, что для $V \in \mathscr{A}_U \cup \mathscr{B}_U$

$$S(U) \leqslant S(V) \leqslant 2S(U). \tag{17}$$

Заметим, что $T_n a(t)$ — ступенчатая функция со значениями $S(V)$, где $V \in \mathscr{A}$. При этом, если $|V| = r$, то ввиду (14)

$$\operatorname{mes}\{t : T_n a(t) = S(V)\} = \frac{\mathrm{Ch}(n-r)}{n!} \leqslant \frac{(n-r)!}{n!}\,.$$

Кроме того, если $|U| = k$ ($k = 1, \dots, s$), то

$$|\mathscr{A}_U| \leqslant C_{n-k}^k = \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}$$

и, аналогично,

$$|\mathscr{B}_U| \leqslant C_{n-k}^{k-1} = \frac{(n-k)!}{(k-1)!\,(n-2k+1)!}\,.$$

Поэтому из (16) и (17) получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t: T_n a(t)>\tau\} &\leqslant \sum_{k=1}^{s}\sum_{U\in\mathscr{A}_k}\Biggl(\sum_{V\in\mathscr{A}_U,\, S(V)>\tau}\operatorname{mes}\{t: T_n a(t)=S(V)\}\\ &\qquad+\sum_{V\in\mathscr{B}_U,\, S(V)>\tau}\operatorname{mes}\{t: T_n a(t)=S(V)\}\Biggr)\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{s}\sum_{U\in\mathscr{A}_k,\, S(U)>\tau/2}\biggl(\frac{(n-2k)!}{n!}\cdot\frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}\\ &\qquad+\frac{(n-2k+1)!}{n!}\cdot\frac{(n-k)!}{(k-1)!\,(n-2k+1)!}\biggr)\\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^{s}\sum_{U\in\mathscr{A}_k,\, S(U)>\tau/2}\frac{(n-k)!}{(k-1)!\,n!}\,. \end{aligned}\tag{18}$$

Оценим теперь снизу функцию распределения случайной величины $H_m a(t)$. Для каждого $U\in\mathscr{A}_k$, $S(U)>\tau/2$, через F_U обозначим множество всех $t\in[0,1]$, для которых найдутся множество $W\subset\{1,\dots,m\}$ и взаимно однозначное соответствие $\sigma\colon W\to U$, такие, что $|W|=k$ (считаем, что $m\geqslant n$) и $h_{m,j}(t)=a_{\sigma(j)}$, если $j\in W$, и $h_{m,j}(t)=0$ для всех $j\notin W$. Тогда, прежде всего, для $t\in F_U$

$$H_m a(t)=\sum_{j=1}^{m}h_{m,j}(t)=S(U)>\frac{\tau}{2}\,. \tag{19}$$

Кроме того, ввиду независимости функций $h_{m,j}(t)$ $(j=1,\dots,m)$

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}(F_U)&=C_m^k k!\,\frac{1}{(mn)^k}\Bigl(1-\frac{1}{m}\Bigr)^{m-k}\\ &=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}\Bigl(1-\frac{1}{m}\Bigr)^{m-k}\frac{1}{n^k}\,.\end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m^k}=1\quad\text{и}\quad\lim_{m\to\infty}\Bigl(1-\frac{1}{m}\Bigr)^{m-k}=\frac{1}{e}>\frac{1}{3},$$

то

$$\operatorname{mes}(F_U)>\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^k} \tag{20}$$

для всех достаточно больших $m\in\mathbb{N}$ и всех $k\leqslant s$.

Заметим, что в случае, когда $U\neq U'$, мы имеем $F_U\cap F_{U'}=\varnothing$. Действительно, если $i\in U\setminus U'$, то для любого $t\in F_U$ найдется такое $j\in\{1,\dots,m\}$, что $h_{m,j}(t)=a_i$. В то же время если $t\in F_{U'}$, то либо $h_{m,j}(t)=a_l\neq a_i$, либо

$h_{m,j}(t) = 0 \neq a_i$. Поэтому ввиду оценок (20) и (18), а также леммы 7 получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\} &= \sum_{k=1}^{s} \sum_{U\in\mathscr{A}_k,\, S(U)>\tau/2} \operatorname{mes}(F_U) \geqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{s} \sum_{U\in\mathscr{A}_k,\, S(U)>\tau/2} \frac{1}{n^k} \\ &\geqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{s} \sum_{U\in\mathscr{A}_k,\, S(U)>\tau/2} \frac{(n-k)!}{(k-1)!\, n!} \geqslant \frac{1}{12} \operatorname{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\}, \end{aligned}$$

и лемма доказана, если $n \geqslant 4$.

Если же $1 \leqslant n < 4$, то простая проверка (см. рассуждения перед соотношением (20)) показывает, что

$$\operatorname{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leqslant 5 \operatorname{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\}$$

для всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$ и $\tau > 0$. $\square$

Замечание 9. В то же время оценка

$$\operatorname{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leqslant C \operatorname{mes}\{t : H_n a(t) > \tau\} \qquad (\tau > 0)$$

не верна ни при каком $C > 0$, не зависящем от $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если $a_1 = \dots = a_n = 1$, то

$$\operatorname{mes}\{t : T_n a(t) = n\} = \frac{1}{n!},$$

а

$$\operatorname{mes}\{t : H_n a(t) = n\} = \frac{1}{n^n}\,.$$

§ 5. Свойство Круглова и случайные перестановки

Теорема 10. *Пусть E — r. i. пространство. Для того чтобы оператор K был ограничен в E, необходимо и достаточно, чтобы последовательность операторов T_n была равномерно ограничена в этом пространстве.*

Доказательство. Мы будем использовать обозначения (3), (12) и (13).

Необходимость. По лемме 8 для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \geqslant 0$, $\tau > 0$ и всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leqslant 12 \operatorname{mes}\{t : 2H_m a(t) > \tau\}.$$

Как уже отмечалось в начале предыдущей части, $H_m a \Rightarrow K f_a$ при $m \to \infty$. Следовательно [14, § 6.2],

$$\operatorname{mes}\{t : H_m a(t) > \tau\} \to \operatorname{mes}\{t : K f_a(t) > \tau\} \qquad (m \to \infty)$$

для всех $\tau > 0$, в которых правая часть последнего соотношения непрерывна (т. е. всюду, кроме не более чем счетного множества). Поэтому из предыдущего неравенства следует, что для всех таких τ

$$\operatorname{mes}\{t : T_n a(t) > \tau\} \leqslant 12 \operatorname{mes}\{t : 2K f_a(t) > \tau\}.$$

Так как обе функции в этом неравенстве монотонны и непрерывны справа по τ, то оно справедливо для всех $\tau > 0$.

Хорошо известно [10, § 2.4.3], что из неравенства

$$\operatorname{mes}\{t : |x(t)| > \tau\} \leqslant C \operatorname{mes}\{t : |y(t)| > \tau\} \qquad (\tau > 0)$$

и того, что $y \in E$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \max(C,1)\|y\|_E$ для любого r. i. пространства E. Таким образом, ввиду последнего соотношения

$$\|T_n f_a\|_E \leqslant 24 \cdot \|K f_a\|_E \quad \text{или} \quad \sup\{\|T_n f_a\|_E : \|f_a\| \leqslant 1\} \leqslant 24 \cdot \|K\|_E.$$

Из определения операторов T_n следует, что $T_n x = T_n f_{a_n(x)}$, где $a_n(x) = (a_{n,k}(x))_{k=1}^n$, $a_{n,k}(x) = n \int_{(k-1)/n}^{k/n} x(s)\,ds$. Так как $\|f_{a_n(x)}\|_E \leqslant \|x\|_E$ [10, § 2.3.2], а пространство E сепарабельно или совпадает со своим вторым двойственным, то в итоге

$$\sup_n \|T_n\|_E \leqslant 24 \cdot \|K\|_E.$$

Достаточность. Предположим, что $\sup_n \|T_n\|_E = C < \infty$. В силу леммы 6 и снова [10, § 2.4.3]

$$\|H_m f_a\|_E \leqslant 3\|T_{nm}\|_E \|f_a\|_E \leqslant 3C\|f_a\|_E.$$

Так как $H_m f_a \Rightarrow K f_a$ при $m \to \infty$, то отсюда ввиду [1, предложение 1.5] получаем

$$\|K f_a\|_{E''} \leqslant 3C\|f_a\|_E. \tag{21}$$

Пусть теперь функция $f = f^* \in E$ произвольна. Если

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} f(k2^{-n})\chi_{((k-1)2^{-n}, k2^{-n})}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N}),$$

то $f_n(t) \uparrow f(t)$ п. в. и, значит, $f_n \Rightarrow f$ [14, § 6.2]. Поэтому $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, где $\varphi_n(t)$ и $\varphi(t)$ — характеристические функции случайных величин f_n и f соответственно [14, § 6.4]. Так как, согласно [1, 1.6], $\varphi_{K\xi}(t) = \exp(\varphi_\xi(t) - 1)$ для любой случайной величины ξ, то $\varphi_{Kf_n}(t) \to \varphi_{Kf}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, т. е. $Kf_n \Rightarrow Kf$. Кроме того, ввиду (21)

$$\|K f_n\|_{E''} \leqslant 3C\|f_n\|_E \leqslant 3C\|f\|_E \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Поэтому, применяя еще раз [1, предложение 1.5], получаем $\|Kf\|_{E''} \leqslant 3C\|f\|_E$. Так как функция распределения величины Kf зависит лишь от функции распределения величины f, то последнее означает, что K — ограниченный оператор из E в E''. Тем самым результат получен, если $E = E''$. Осталось рассмотреть случай, когда $E \neq E''$. Тогда пространство E сепарабельно.

Прежде всего, используя тот факт, что любая функция $f \in E''$, $f \geqslant 0$, является пределом п. в. своих «срезок» $\tilde{f}_n := f\chi_{\{f_n \leqslant n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$, и рассуждая точно так же, как и ранее, можно доказать ограниченность оператора K в пространстве E''. Поэтому ввиду [3, теорема 7.2] функция

$$g(t) := \frac{\ln(e/t)}{\ln(\ln(\ln(a/t)))},$$

где $a > 0$ достаточно велико, принадлежит E''. Таким образом, если

$$\psi(u) := \frac{u\ln(e/u)}{\ln(\ln(\ln(a/u)))} \qquad (0 < u \leqslant 1),$$

то $M_\psi \subset E''$. Отсюда следует, что $(M_\psi)_0 \subset (E'')_0 = E_0 = E$ в силу сепарабельности пространства E. Легко проверить, что

$$h(t) := \frac{\ln(e/t)}{\ln(\ln(a/t))} \in (M_\psi)_0$$

и, значит, $h \in E$. Отсюда и из [3, теорема 4.4] следует, что

$$K\colon L_\infty \to E. \tag{22}$$

Пусть теперь $f \in E$. Ввиду сепарабельности пространства E существует такая последовательность $\{f_n\} \subset L_\infty$, что $\|f_n - f\|_E \to 0$. Таким образом, из того, что $K\colon E \to E''$, следует, что $\|Kf_n - Kf\|_{E''} \to 0$. С другой стороны, в силу (22) и изометричности вложения пространства E в E'' получаем, что $\{Kf_n\} \subset E$, а значит, $Kf \in E$. □

Замечание 11. Из доказательства теоремы вытекают следующие оценки для произвольного r. i. пространства E:

$$\frac{1}{24}\sup_n \|T_n\|_E \leqslant \|K\|_E \leqslant 3\sup_n \|T_n\|_E. \qquad \square$$

Приведем некоторые следствия, вытекающие из теоремы 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, S_n — множество перестановок чисел $1,\dots,n$, а $l = l_n$ — произвольное взаимно однозначное отображение множества S_n на множество $\{1,\dots,n!\}$. Распространим оператор A_n, определенный ранее на $\mathbb{R}^n$ соотношением (3), на пространство матриц $x = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ следующим образом:

$$A_n x(t) = \sum_{i=1}^n x_{i,\pi(i)}, \qquad t \in \biggl(\frac{l(\pi)-1}{n!}, \frac{l(\pi)}{n!}\biggr).$$

Один из главных результатов работы [8] (см. следствие 8) состоит в том, что условие равномерной ограниченности операторов, порожденных случайными перестановками, на множестве диагональных матриц является достаточным для их равномерной ограниченности на множестве всех матриц. Применяя теорему 10, мы получаем

Следствие 12. *Если $E \in \mathbb{K}$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой матрицы $x = (x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$*

$$\|A_n x\|_E \leqslant C\biggl(\biggl\|\sum_{k=1}^n x_k^*\chi_{(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}\biggr\|_E + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{n^2} x_k^*\biggr),$$

где $(x_k^*)_{k=1}^{n^2}$ — перестановка последовательности $(|x_{i,j}|)_{i,j=1}^n$ в невозрастающем порядке, а $C > 0$ не зависит ни от n, ни от x.

Следствие 13. *Для того чтобы операторы T_n были равномерно ограничены в пространстве Орлича* $\exp L_p$, *необходимо и достаточно, чтобы $p \leqslant 1$.*

Действительно, это утверждение вытекает из теоремы 10 и того, что условие $p \leqslant 1$ эквивалентно ограниченности оператора K в пространстве $\exp L_p$ [1, 2.4, с. 42].

Из теоремы 10 и следствия 3 вытекает

Следствие 14. *Для любого r. i. пространства E, такого, что* $\sup_n \|T_n\|_E < \infty$, *существует r. i. пространство* $F \subsetneqq E$, *для которого также* $\sup_n \|T_n\|_F < \infty$.

Для данного r. i. пространства E и $p > 1$ через $E(p)$ обозначим пространство всех измеримых на $[0,1]$ функций $x = x(t)$, таких, что $|x|^p \in E$, с нормой

$$\|x\|_{E(p)} = \||x|^p\|_E^{1/p}.$$

Хорошо известно, что $E(p) \subset E$ и что $\|x\|_E \leqslant \|x\|_{E(p)}$ для всех $x \in E(p)$ [9, 1.d].

Пусть E и F — r. i. пространства, $E \subset F$ и оператор K ограничен в E. Отсюда, вообще говоря, не вытекает ограниченность этого оператора в F [3, следствия 5.6 и 5.7]. Однако справедливо

Следствие 15. *Если оператор K ограничен в пространстве $E(p)$, то он ограничен и в E.*

Доказательство. Ввиду теоремы 10 достаточно доказать, что из равномерной ограниченности операторов T_n в $E(p)$ следует их равномерная ограниченность в E.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \geqslant 0$ и $\|T_n x\|_{E(p)} \leqslant C\|x\|_{E(p)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Это означает, что

$$\|(T_n x)^p\|_E^{1/p} \leqslant C\|x^p\|_E^{1/p}.$$

После замены $x^p = y$ получим

$$\|(T_n y^{1/p})^p\|_E \leqslant C^p\|y\|_E.$$

Так как из определения операторов T_n следует, что $(T_n y^{1/p})^p \geqslant T_n y$, то, согласно предыдущему соотношению, $\|T_n y\|_E \leqslant C^p\|y\|_E$, т. е. T_n равномерно ограничены в E. □

Литература

[1] M. Sh. Braverman, *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[2] В. М. Круглов, *Замечание о бесконечно делимых распределениях*, Теория вероятн. и примен., **15** (1970), 331–336.

[3] S. V. Astashkin, F. A. Sukochev, *Series of independent random variables in rearrangement invariant spaces: an operator approach*, Israel J. Math., **145** (2005), 125–156.

[4] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, *Сравнение сумм независимых и дизъюнктных функций в симметричных пространствах*, Матем. заметки, **76**:4 (2004), 483–489.

[5] W. Johnson, G. Schechtman, *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces*, Ann. Probab., **17**:2 (1989), 789–808.

[6] S. Kwapień, C. Schütt, *Some combinatorial and probabilistic inequalities and their applications to Banach space theory*, Stud. Math., **82**:1 (1985), 91–106.

[7] Е. М. Семенов, *Операторные свойства случайных перестановок*, Функц. анализ и его прил., **28**:3 (1994), 82–85.

[8] S. Montgomery–Smith, E. M. Semenov, *Random rearrangements and operators*, in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 184, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 157–183.

[9] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function spaces*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.

[10] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
[11] J. V. Ryff, *Orbits of L_1-functions under doubly stochastic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., **117** (1965), 92–100.
[12] G. G. Lorentz, *Relations between function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), 127–132.
[13] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
[14] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука, М., 1976.

Самарский госуниверситет
e-mail: astashkn@ssu.samara.ru

Поступило в редакцию
28 ноября 2007 г.

School of Computer Science, Engineering and Mathematics
Flinders University, Australia
e-mail: zani0005@infoeng.flinders.edu.au

Воронежский госуниверситет
e-mail: semenov@func.vsu.ru

School of Mathematics and Statistics
University of New South Wales, Kensington, Australia
e-mail: f.sukochev@unsw.edu.au