Математические заметки

том 76 выпуск 4 октябрь 2004

УДК 517.5+517.982

СРАВНЕНИЕ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ И ДИЗЪЮНКТНЫХ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев

В работе изучаются суммы независимых функций (случайных величин) в симметричном пространстве X на $[0,1]$. Наш подход является операторным и близко связан с методами, развитыми, прежде всего, М. Ш. Браверманом. Главные результаты относятся к экспоненциальным пространствам Орлича $\exp(L_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и пространствам Лоренца Λ_ψ. В качестве следствий мы получаем результаты, дополняющие хорошо известную теорему Джонсона и Шехтмана о том, что из условия $L_p \subset X$, $p<\infty$, следует эквивалентность норм сумм независимых функций и их дизъюнктных “копий”. Кроме того, доказано утверждение, в определенном смысле обратное к этой теореме.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Работа посвящена изучению сумм независимых функций в симметричных пространствах. Хорошо известно, что такие суммы ведут себя зачастую подобно суммам имеющих то же распределение дизъюнктных функций. Так, в 1970 году Розенталь [1] доказал замечательное неравенство, из которого следует, что для произвольной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ независимых функций из $L_p[0,1]$, $p \geqslant 2$, таких, что $\int_0^1 f_k(t)\,dt = 0$, отображение $f_k \to \bar f_k$, где

$$\bar f_k(t) := f_k(t-k+1)\chi_{[k-1,k)}(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

продолжается до изоморфизма между замкнутой линейной оболочкой $[f_k]_{k=1}^\infty$ (взятой в $L_p[0,1]$) и замкнутой линейной оболочкой $[\bar f_k]_{k=1}^\infty$ (взятой в $L_p[0,\infty)\cap L_2[0,\infty)$). В [2] неравенство Розенталя было обобщено на случай пространств Лоренца $L_{p,q}$, $2<p<\infty$, $0<q<\infty$. Значительное продвижение в этом направлении было затем сделано Джонсоном и Шехтманом [3, теорема 1], которые ввели пространства Y_X и Z_X на $[0,\infty)$, построенные по данному симметричному пространству X на $[0,1]$, и показали, что любая конечная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^n$ независимых, в среднем равных нулю (соответственно положительных) функций в X эквивалентна (равномерно по n) последовательности их дизъюнктных сдвигов в Y_X (соответственно Z_X) при условии, что X содержит $L_p[0,1]$ при некотором $p<\infty$. В частности, из их результата непосредственно следует, что если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность независимых функций в симметричном пространстве X такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \lambda(\{f_k \neq 0\}) \leqslant 1 \tag{1}$$

Работа поддержана Австралийским Научным Советом.

(λ – мера Лебега), то отображение $f_k \to \bar{f}_k$, $k \geqslant 1$, между $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательностью их дизъюнктных “копий” $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ продолжается до изоморфизма между замкнутыми линейными оболочками $[f_k]_{k=1}^{\infty}$ и $[\bar{f}_k]_{k=1}^{\infty}$ в X при условии, что X содержит $L_p[0,1]$ для некоторого $p < \infty$.

В этой работе изучается более общий вопрос: *для каких симметричных пространств X и Y на $[0,1]$ существует константа $C = C(X,Y) > 0$ такая, что для каждой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{n} \subset X$ независимых функций, удовлетворяющих условию* (1), *выполнено*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big\|_Y \leqslant C \Big\| \sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k \Big\|_X. \tag{2}$$

Наш подход основывается на изучении некоторого линейного оператора и близок подходу, развитому Браверманом [4] при изучении неравенства Розенталя и его модификаций в симметричных пространствах и, в свою очередь, использующему еще более ранние идеи и вероятностные конструкции Круглова [5]. Подробнее речь об этом пойдет в п. 3 – после того, как в п. 2 будут приведены все необходимые определения. В пп. 4 и 5 будут сформулированы основные результаты работы, относящиеся к экспоненциальным пространствам Орлича $\exp(L_p)$ и пространствам Лоренца Λ_ψ. Одно из полученных при этом следствий в случае $X = Y$ представляет из себя утверждение, в определенном смысле обратное к теореме Джонсона и Шехтмана [3, теорема 1].

В п. 6, являющемся последней частью работы, мы распространим результаты на произвольные последовательности независимых функций (вообще говоря, не удовлетворяющие условию (1)), дополнив тем самым результаты работы [3].

2. Определения и обозначения. Через $S(\Omega)$ $(= S(\Omega, \mathscr{P}))$ будет обозначаться линейное пространство всех измеримых конечных п.в. функций на пространстве с мерой $(\Omega, \mathscr{P})$, рассматриваемое с топологией сходимости по мере на множествах конечной меры.

Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $[0,\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant \infty$, называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если

(i) из того, что $y \in E$ и $|x| \leqslant |y|$, следует $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;
(ii) из того, что $y \in E$ и $x^* = y^*$, следует $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Здесь и далее λ – мера Лебега, а x^* – невозрастающая непрерывная справа *перестановка* $|x|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf\big\{s \geqslant 0\colon \lambda(\{|x| > s\}) \leqslant t\big\}, \qquad t > 0.$$

Если E – симметричное пространство на интервале $[0,\alpha)$, то *двойственное* (или *ассоциированное*) пространство $E^\times$ состоит из всех измеримых функций y, для которых

$$\|y\|_{E^\times} := \sup\bigg\{\int_0^\alpha |x(t)y(t)|\,dt\colon\ x \in E,\ \|x\|_E \leqslant 1\bigg\} < \infty.$$

Если E^* – пространство, сопряженное к E, то $E^\times \subset E^*$ и $E^\times = E^*$, если и только если E сепарабельно. Естественное вложение E в его второе двойственное $E^{\times\times}$ является изометрической сюръекцией, если и только если E *максимально* (или имеет *свойство Фату*), т.е. из того, что

$$\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subseteq E, \qquad f \in S[0,\alpha), \qquad f_n \to f \ \text{ п.в. на } [0,\alpha), \qquad \sup_n \|f_n\|_E < \infty,$$

следует

$$f \in E \quad \text{ и } \quad \|f\|_E \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_E.$$

Норма $\|\cdot\|_E$ симметричного пространства E называется *порядково полунепрерывной*, если единичный шар E замкнут в E относительно сходимости почти всюду. Последнее эквивалентно тому, что естественное вложение E в его второе двойственное – изометрия.

Для любого симметричного пространства E на $[0,\alpha)$ справедливы непрерывные вложения

$$L_1[0,\alpha) \cap L_\infty[0,\alpha) \subseteq E \subseteq L_1[0,\alpha) + L_\infty[0,\alpha).$$

Через E^0 далее будем обозначать замыкание $L_1[0,\alpha) \cap L_\infty[0,\alpha)$ в E. Если $E \neq L_\infty$, то E^0 сепарабельно. И наконец, если E – симметричное пространство, то функция $\phi_E(t) := \|\chi_A(\,\cdot\,)\|_E$, где измеримое множество A удовлетворяет условию $\lambda(A) = t$, а χ_A – характеристическая функция этого множества, называется *фундаментальной функцией* E. Подробнее о симметричных пространствах см. монографии [6]– [8].

3. Свойство Круглова и оператор $\mathscr{K}$. Пусть f – измеримая функция (случайная величина) на $[0,1]$ и $\mathscr{F}_f$ – ее функция распределения. Через $\pi(f)$ мы обозначим любую случайную величину на $[0,1]$, характеристическая функция которой задается соотношением

$$\theta_{\pi(f)}(t) = \exp\biggl(\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1)\, d\mathscr{F}_f(x)\biggr).$$

Следующее свойство интенсивно изучалось и использовалось Браверманом [4].

Определение. Говорят, что симметричное пространство X имеет *свойство Круглова* ($X \in \mathbb{K}$), если из того, что $f \in X$, следует $\pi(f) \in X$.

Определим положительный линейный оператор, который тесно связан со свойством Круглова. Пусть $\{E_n\}$ – последовательность попарно дизъюнктных подмножеств $[0,1]$,

$$m(E_n) = \frac{1}{e\cdot n!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Для $f \in S([0,1],\lambda)$ положим

$$\mathscr{K} f(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\dots) := \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\omega_k)\chi_{E_n}(\omega_0). \tag{3}$$

Тогда

$$\mathscr{K}\colon S([0,1],\lambda) \to S(\Omega,\mathscr{P}), \qquad \text{где} \quad (\Omega,\mathscr{P}) := \prod_{k=0}^{\infty}([0,1],\lambda_k)$$

(λ_k – мера Лебега на $[0,1]$ для каждого $k \geqslant 0$).

Оператор $\mathscr{K}$ (точнее, близкий к нему) можно определить и несколько иначе. Пусть $f \in S([0,1],\lambda)$ и $\{f_{n,k}\}_{k=1}^n$ – последовательность измеримых функций на $[0,1]$ такая, что

(i) функции $f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,n}, \chi_{E_n}$ независимы для каждого $n \in \mathbb{N}$,
(ii) $\mathscr{F}_{f_{n,k}} = \mathscr{F}_f$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Определим

$$\mathscr{K}' f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{n,k}(x)\chi_{E_n}(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{3'}$$

Ясно, что функции распределения $\mathscr{K} f$ и $\mathscr{K}' f$ одинаковы для любой $f \in S([0,1],\lambda)$. Так как в дальнейшем речь идет о симметричных пространствах, то мы можем $\mathscr{K}' f$ отождествлять с $\mathscr{K} f$.

Непосредственное вычисление, использующее (3) (или (3′)), показывает, что $\theta_{\mathscr{K} f}(t) = \theta_{\pi(f)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тем самым получаем простое, но важное утверждение, благодаря которому появляется возможность применять к изучению рассматриваемых вопросов интерполяционную технику.

Предложение 1. *Если X – симметричное пространство на $[0,1]$, то оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в X тогда и только тогда, когда $X \in \mathbb{K}$.*

Следующее утверждение имеет очень важное значение для всей работы.

Теорема 2. *Пусть $X \subseteq Y$, где X и Y – симметричные пространства на $[0,1]$. Рассмотрим следующие условия:*

(i) *существует $C > 0$ такое, что (2) верно для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых функций, удовлетворяющих (1);*
(ii) *существует $C > 0$ такое, что (2) верно для произвольной последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых одинаково распределенных функций, удовлетворяющих (1);*
(iii) *оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из X в $Y^{\times\times}$;*
(iii′) *оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из X в Y.*

Справедливы импликации

$$\text{(iii}'\text{)} \implies \text{(i)} \iff \text{(ii)}.$$

Если же норма пространства Y порядково полунепрерывна, то

$$\text{(i)} \iff \text{(ii)} \iff \text{(iii)}.$$

4. Оператор $\mathscr{K}$ в экспоненциальных пространствах Орлича. Пусть Φ – функция Орлича на $[0,\infty)$, т.е. Φ – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(\infty) = \infty$. Пространство Орлича $L_\Phi = L_\Phi[0,1]$ состоит из всех функций f, измеримых на $[0,1]$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf\biggl\{\rho > 0 \colon \int_0^1 \Phi\biggl(\frac{|f(t)|}{\rho}\biggr)\,dt \leqslant 1\biggr\}.$$

Пространство L_Φ всегда максимально, а сепарабельно тогда и только тогда, когда функция Φ удовлетворяет Δ_2-условию в ∞ (см. [7] или [8]).

Экспоненциальное пространство Орлича $\exp(L_p)$ порождается функцией $N_p(t) := e^{t^p}-1$, которая при $p \geqslant 1$ выпукла для всех $t \geqslant 0$, а при $p \in (0,1)$ выпукла для достаточно больших t. Кроме того, положим $\exp(L_\infty) := L_\infty$.

Из результатов [5] и [4] следует, что оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует в $\exp(L_p)$, если и только если $p \in (0,1]$. Для того чтобы охарактеризовать поведение этого оператора в пространствах $\exp(L_p)$, $p \in (1,\infty]$, введем множество $\mathscr{Y}_p$, состоящее из всех симметричных пространств Y таких, что оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из $\exp(L_p)$ в Y. Определим также функции Орлича

$$M_p(t) := \exp\{|t| \ln^{1/p}(e+|t|)\} - 1, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad p > 0.$$

Следующее утверждение (в случае $p=\infty$) показывает ту важную роль, которую играет пространство L_{M_1} в изучении систем равномерно ограниченных независимых функций (ср. [9, следствие 3.5.2]).

Теорема 3. *Единственным минимальным элементом множества $\mathscr{Y}_p$, $1 < p \leqslant \infty$, упорядоченного по вложению, является пространство Орлича L_{M_q}, где $1/p + 1/q = 1$.*

Следствие 4. *Пусть $p \in (1,\infty]$ и $q = p/(p-1)$. Существует $C_p > 0$ такое, что для любой конечной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \exp(L_p)$, удовлетворяющей* (1), *выполнено*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_{L^0_{M_q}} \leqslant C_p \Big\|\sum_{k=1}^n \bar f_k\Big\|_{\exp(L_p)}.$$

Более того, если некоторое симметричное пространство Y с порядково полунепрерывной нормой обладает тем свойством, что для всех последовательностей $\{f_k\}_{k=1}^n \subset \exp(L_p)$ таких, как выше, мы имеем $\|\sum_{k=1}^n f_k\|_Y \leqslant C\|\sum_{k=1}^n \bar f_k\|_{\exp(L_p)}$, то $L^0_{M_q} \subseteq Y$.

5. Оператор $\mathscr{K}$ в пространствах Лоренца. Обозначим через Ψ множество всех возрастающих вогнутых функций на $[0,1]$, $\psi(0) = \psi(+0) = 0$. Если $\psi \in \Psi$, то пространство Лоренца $\Lambda_\psi = \Lambda_\psi[0,1]$ состоит из всех функций $x(t)$, измеримых на $[0,1]$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} := \int_0^1 x^*(t)\, d\psi(t) < \infty.$$

Теорема 5. *Если $\psi \in \Psi$, то оператор $\mathscr{K}$ ограничен в пространстве Лоренца Λ_ψ (т.е. $\Lambda_\psi \in \mathbb{K}$) тогда и только тогда, когда существует $C > 0$ такое, что*

$$\sum_{k=1}^\infty \psi\left(\frac{u^k}{k!}\right) \leqslant C\psi(u), \qquad u \in (0,1]. \tag{4}$$

Заметим, что условие (4) для функций $\psi \in \Psi$ возникло также в работе [10] при изучении случайных перестановок в симметричных пространствах.

Следующее утверждение в некотором смысле обратно к утверждению теоремы Джонсона и Шехтмана [3] (см. введение).

Следствие 6. *Пусть симметричное пространство E обладает таким свойством: для каждого максимального симметричного пространства $X \supset E$ существует $C > 0$ такое, что неравенство*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n f_k\Big\|_X \leqslant C\Big\|\sum_{k=1}^n \bar{f}_k\Big\|_X$$

выполнено для любой последовательности $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$ независимых функций, удовлетворяющей (1). *Тогда E содержит $L_p[0,1]$ для некоторого $p \in [1,\infty)$.*

Последнее утверждение этого пункта показывает, что критерий ограниченности оператора $\mathscr{K}$ не может быть дан в терминах вложений.

Следствие 7. *Если $\psi \in \Psi$ такова, что для каждого $\alpha \in (0,1]$ выполнено $\sup_{t\in(0,1]} t^{-\alpha}\psi(t) = \infty$, то существует $\phi \in \Psi$ такая, что $\phi \leqslant C\psi$ при некотором $C > 0$ и оператор $\mathscr{K}$ не ограничен в любом симметричном пространстве X с фундаментальной функцией $\phi_X = \phi$.*

6. Общий случай. Здесь мы рассмотрим главный вопрос (см. введение) в том случае, когда неравенство (1), вообще говоря, не выполнено. Следуя [3], для произвольного симметричного пространства X на $[0,1]$ определим функциональное пространство Z_X на $[0,\infty)$:

$$Z_X := \{f \in L_1[0,\infty) + L_\infty[0,\infty) \colon \|f\|'_{Z_X} := \|f^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|f^*\chi_{[1,\infty)}\|_1 < \infty\}.$$

Так как квазинорма $\|\cdot\|'_{Z_X}$ эквивалентна норме $\|f\|_{Z_X} := \|f^*\chi_{[0,1]}\|_X + \|f\|_{L_1(0,\infty)}$, $f \in Z_X$, то Z_X является симметричным пространством на $[0,\infty)$.

Главный результат здесь дополняет теорему Джонсона и Шехтмана [3, неравенство (4)], показывая, что и в общей ситуации (модифицированное) неравенство (2) при условии ограниченности оператора $\mathscr{K}$ остается верным.

Теорема 8. *Пусть X и Y – симметричные пространства на $[0,1]$, $X \subseteq Y$. Если*

(i) *оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из X в $Y^{\times\times}$ и норма Y порядково полунепрерывна, или*

(ii) *оператор $\mathscr{K}$ ограниченно действует из X в Y,*

то существует $C > 0$ такое, что для каждой последовательности $\{g_i\}_{i=1}^n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, независимых функций выполнено неравенство

$$\Big\|\sum_{i=1}^n g_i\Big\|_Y \leqslant C\Big\|\sum_{i=1}^n \bar{g}_i\Big\|_{Z_X}.$$

Следствие 9. *Пусть X – интерполяционное пространство относительно банаховой пары $(L_1(0,1), L_\infty(0,1))$. Если оператор $\mathscr{K}$ ограничен в X, то существует константа $C > 0$ такая, что для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, и каждой последовательности*

$$\{g_k\}_{k=1}^n, \qquad g_k \geqslant 0, \quad g_k^* = f_k^*, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

выполнено

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i\right\|_X \leqslant C\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i\right\|_X.$$

В случае, когда симметричное пространство $X \supseteq L_p[0,1]$, $p < \infty$, последнее утверждение было доказано в [3] (см. неравенство (10)).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Rosenthal H. P. On the subspaces of L_p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables // Israel J. Math. 1970. V. 8. P. 273–303.

[2] Carothers N. L., Dilworth S. J. Inequalities for sums of independent random variables // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 194. P. 221–226.

[3] Johnson W. B., Schechtman G. Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // Ann. Probab. 1989. V. 17. P. 789–808.

[4] Braverman M. Sh. Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[5] Круглов В. М. Замечание о бесконечно делимых распределениях // Теория вероятности и ее примен. 1970. Т. 15. №2. С. 331–336.

[6] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

[7] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces II. Function spaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1979.

[8] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. New York: Academic Press, 1988.

[9] Kwapień S., Woyczyński W. A. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple: Birkhäuser, 1992.

[10] Montgomery-Smith S., Semenov E. M. Random rearrangements and operators // Amer. Math. Soc. Trans. (2). 1998. V. 184. P. 157–183.

(С. В. Асташкин) Самарский государственный университет

(Ф. А. Сукочев) Flinders University, Australia

E-mail: astashkn@ssu.samara.ru, sukochev@infoeng.flinders.edu.au

Поступило 12.03.2004