

Евгений Михайлович Семёнов

К 60-летию со дня рождения

В августе 2000 г. исполняется 60 лет видному российскому математику, доктору физико-математических наук, профессору Воронежского государственного университета Евгению Михайловичу Семёнову.

Евгений Михайлович Семёнов родился 22 августа 1940 г. в г. Грозном.

Его отец — Михаил Кузьмич Семёнов (1913 – 1941) — был заместителем командира пограничной заставы на румынской границе. Он погиб на фронте в возрасте 27-ми лет. Мать Е.М.Семёнова — Нина Капитоновна Витченко (1906 – 1976) — после переезда в г. Воронеж работала ассистентом Воронежского госуниверситета.

Вся жизнь Евгения Михайловича связана с Воронежским университетом. Годы его студенчества (1957-1962 гг.) совпали с расцветом Воронежской математической школы. Среди его преподавателей были такие известные ученые, как Ю. Г. Борисович, М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, А. И. Медведев, Б. С. Митягин, В. М. Тихомиров, В. И. Соболев, А. С. Шварц.

Математическое дарование Е. М. Семёнова проявилось уже в студенческие годы. Под влиянием С.Г.Крейна и М.А.Красносельского он увлекается функциональным анализом и получает первые самостоятельные результаты.

Начало научной деятельности Е. М. Семёнова (конец 50-ых — начало 60-ых годов) по времени совпало с бурным развитием нового раздела функционального анализа — теории интерполяции операторов. Благодаря, прежде всего, работам С.Г.Крейна, одним из центров становления этого перспективного направления стал Воронеж.

Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) — две банаховы пары (так называется пара банаховых пространств, линейно и непрерывно вложенных в некоторое отделимое линейное топологическое пространство). Предположим, что X и Y — такие банаховы пространства, что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ и $Y_0 \cap Y_1 \subset Y \subset Y_0 + Y_1$. Тогда говорят, что тройка (X_0, X_1, X) интерполяционна относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) , если любой линейный оператор $T : X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$, ограниченный из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1 , ограниченно действует из X в Y . В частности, если $X_i = Y_i$ ($i = 0, 1$) и $X = Y$, то X называется интерполяционным между X_0 и X_1 .

Первая интерполяционная теорема, сформулированная в терминах билинейных форм, была доказана еще в 1926 г. М.Риссом [1]. В 1938 г. Г.О.Торин привел совершенно новое доказательство этого результата, устранив имевшиеся ограничения и придав ему операторный вид [2]. Теорема Рисса-Торина утверждает следующее: если $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0 \leq q_1 \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$ и $p^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$, $q^{-1} = (1-\theta)q_0^{-1} + \theta q_1^{-1}$, то тройка (L_{p_0}, L_{p_1}, L_p) интерполяционна относительно тройки (L_{q_0}, L_{q_1}, L_q) (функции этих пространств определены на произвольном пространстве с мерой).

Другие важные теоремы, приведшие в результате к созданию теории интерполяции операторов, были получены В.Орlichem в 1934 г. [3] и Ж.Марцинкевичем в 1939 г. [4]. Заметим, что последняя из них появилась первоначально без доказательства, которое было дано А.Зигмундом позднее в 1956 г. [5].

Вышеупомянутые результаты относились к изучению операторов, действующих либо в L_p -пространствах, либо близких к ним. В конце 50-ых — начале 60-ых годов, как уже говорилось, было начато создание абстрактной теории интерполяции. Основная роль при этом принадлежала исследованиям Ж.-Л.Лионса, А.П.Кальдерона и С.Г.Крейна, существенный вклад в разработку теории внесли Н.Ароншайн, Э.Гальярдо и Я.Петре.

В работах С.Г.Крейна и Ю.И.Петунина была развита теория шкал банаховых пространств, изучались их интерполяционные свойства. Неудивительно поэтому, что первые работы Е. М. Семёнова, ученика С.Г.Крейна, были посвящены именно этой тематике.

Семейство банаховых пространств $\{E_u\}$ ($0 \leq u \leq 1$) называется шкалой, если
 1) при $v > u$ пространство E_v плотно вложено в E_u и $\|x\|_{E_u} \leq C(u, v)\|x\|_{E_v}$ ($x \in E_v$);

2) существует функция $C(u, v, w)$, конечная при всех $0 \leq u < v < w \leq 1$, такая, что

$$\|x\|_{E_v} \leq C(u, v, w) \|x\|_{E_u}^{\frac{w-v}{w-u}} \|x\|_{E_w}^{\frac{v-u}{w-u}} \quad (x \in E_w).$$

В частности, если $C(u, v) = C(u, v, w) \equiv 1$, то шкала $\{E_u\}$ ($0 \leq u \leq 1$) называется нормальной. Если, кроме того, функция $\varphi_x(u) = \|x\|_{E_u}$ ($x \in E_1$) непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то нормальная шкала $\{E_u\}$ называется непрерывной нормальной шкалой, соединяющей пространства E_0 и E_1 . Если F_0 и F_1 — два банаховых пространства, $F_1 \subset F_0$ и $\|x\|_{F_0} \leq \|x\|_{F_1}$ ($x \in F_1$), то существует непрерывная нормальная шкала пространств $\{E_u^{\max}\}$ ($0 \leq u \leq 1$) (называемая максимальной), которая обладает следующими свойствами:

- 1) $E_0^{\max} = F_0$; 2) $F_1 \subset E_1^{\max}$ и $\|x\|_{E_1^{\max}} \leq \|x\|_{F_1}$ ($x \in F_1$);
- 3) если $\{E_u\}$ ($0 \leq u \leq 1$) — непрерывная шкала, такая, что для $i = 0, 1$ $F_i \subset E_i$ и $\|x\|_{E_i} \leq \|x\|_{F_i}$ ($x \in F_i$), то справедливо неравенство

$$\|x\|_{E_u} \leq \|x\|_{E_u^{\max}} \quad (x \in F_1, 0 \leq u \leq 1).$$

Важным свойством максимальной нормальной шкалы является то, что она обладает интерполяционным свойством по отношению ко всякой нормальной шкале.

Интерес Е. М. Семёнова к теории шкал был первоначально связан с изучением интерполяционных свойств шкал банаховых пространств измеримых функций. Так, в его совместной работе с С.Г.Крейном [6] рассматривается семейство пространств функций, измеримых на отрезке $[0, 1]$, с нормами

$$\|x\|_{\Lambda(u)} = \int_0^\infty n_x^{1-u}(z) dz \quad (0 \leq u \leq 1),$$

где здесь и далее

$$n_x(z) = \text{mes} \{t : |x(t)| > z\} \quad (z > 0).$$

Эти пространства были введены Г.Г.Лоренцем [7], в связи с чем они носят его имя. В работе [6] получен ряд важных новых свойств пространств Лоренца. Так, например, показано, что ограниченность произвольной полунормы на таком пространстве следует из ее ограниченности на множестве характеристических функций. Используя это, авторы доказали ряд интерполяционных утверждений, в частности, то, что пространства Лоренца образуют максимальную шкалу пространств, соединяющую пространства L_1 и L_∞ . В работе [8] Е. М. Семёнов вводит новую

шкалу пространств $M_0(u)$ ($0 \leq u \leq 1$). Доказано, что $M_0(u)^* = \Lambda(u)$, изучаются их интерполяционные свойства.

Итогом этих и некоторых других исследований Е. М. Семёнова стала кандидатская диссертация "Шкалы банаховых пространств, соединяющие пространства L_1 и L_∞ ", успешно защищенная им в 1964 г. сразу после окончания аспирантуры в Воронежском госуниверситете.

С комплексным методом интерполяции, введенным А.П.Кальдероном [9], тесно связана работа [10], написанная Е. М. Семёновым совместно с С. Г. Крейном и Ю. И. Петуниным. Шкала банаховых идеальных пространств измеримых функций $\{E_u\}$ ($0 \leq u \leq 1$) на некотором пространстве с мерой называется гипершкалой, если

$$\| |x_0|^\mu |x_1|^\nu \|_{E_v} \leq \|x_0\|_{E_u}^\mu \|x_1\|_{E_w}^\nu,$$

где $x_0, x_1 \in E_1$, $0 \leq u < v < w \leq 1$, $\mu = (w-v)/(w-u)$, $\nu = (v-u)/(w-u)$. В работе [10] доказано, что среди всех гипершквал, соединяющих два пространства, существует максимальная. В частности, максимальной гипершкалой, соединяющей произвольное банахово идеальное пространство E с пространством L_∞ , является семейство $\{E_u\}$ с нормами

$$\|x\|_{E_u} = \| |x|^{1/(1-u)} \|_E^{1-u} \quad (0 \leq u \leq 1).$$

Показано, что максимальную гипершкалу образуют пространства комплексного метода $[E_0, E_1]_u$ ($0 \leq u \leq 1$), построенные по произвольной паре банаховых идеальных пространств (E_0, E_1) .

Одновременно Е. М. Семёнов все большее внимание уделяет изучению банаховых пространств измеримых функций в более широком смысле, а не только в связи с теорией интерполяции.

К тому времени уже достаточно интенсивно изучались банаховы идеальные пространства функций [11]. Эти пространства имеют следующее свойство: если $|x(t)| \leq |y(t)|$ и $y(t) \in E$, то $x(t) \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

В работе 1964 г. "Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций-[12] Е. М. Семёнов вводит важное понятие симметричного пространства. Так называется банахово идеальное пространство функций, удовлетворяющее требованию: если $y(t) \in E$ и функции $|y(t)|$ и $|x(t)|$ равноизмеримы (т.е. $n_x(z) = n_y(z)$ ($z > 0$)), то $x(t) \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$. Заметим, что ранее симметричные пространства с дополнительным предположением о полунепрерывности нормы под названием перестановочно инвариантных были введены Г. Г. Лоренцем [13].

Важные примеры симметричных пространств — пространства L_p ($1 \leq p \leq \infty$), их обобщение — пространства Орлича, а также степенные пространства Лоренца и Марцинкевича, впервые появившиеся в работе [7] (см. также [14]). В работе [12] Е. М. Семёнов определяет пространства Лоренца и Марцинкевича, построенные по произвольной неотрицательной возрастающей вогнутой функции, устанавливает ряд их свойств. Здесь вводится важное в теории симметричных пространств понятие фундаментальной функции: если E — симметричное пространство функций, измеримых на $[0, 1]$, то его фундаментальной функцией называется функция $\varphi_E(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_E$ ($0 \leq t \leq 1$) ($\chi_{(0,t)}$ — характеристическая функция интервала $(0, t)$).

Показано, что пространства Лоренца $\Lambda(\tilde{\varphi})$ ($\tilde{\varphi}(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта $\varphi(t)$) и Марцинкевича $M(\psi)$, $\psi(t) = t/\varphi(t)$ являются, соответственно, минимальным и максимальным пространствами в классе всех симметричных пространств с фундаментальной функцией φ . Это означает, что для любого симметричного пространства E с такой фундаментальной функцией выполнено: $\Lambda(\tilde{\varphi}) \subset E \subset M(\psi)$, $\|x\|_{M(\psi)} \leq \|x\|_E$ ($x \in E$) и $\|x\|_E \leq \|x\|_{\Lambda(\tilde{\varphi})}$ ($x \in \Lambda(\tilde{\varphi})$).

Кроме того, пространства L_∞ и L_1 — минимальное и максимальное пространства в классе всех симметричных пространств функций на $[0, 1]$, т.е. имеют место непрерывные вложения: $L_\infty \subset E \subset L_1$.

В дальнейшем понятие симметричного пространства оказалось очень плодотворным как при изучении интерполяционных свойств операторов, так и при изучении геометрии функциональных пространств. Выяснилось, что многие задачи находят свое наиболее полное или даже окончательное решение именно в этом классе пространств.

В 1968 году, в возрасте 28 лет Е. М. Семёнов успешно защищает докторскую диссертацию "Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах". В 1967 г. Е. М. Семёнов стал одним из первых в стране лауреатом премии Ленинского комсомола.

Одно из направлений работы Е. М. Семёнова в конце 60-ых годов было связано со знаменитой теоремой Марцинкевича [4]. Пусть квазилинейный оператор A действует из L_{p_i} в пространство измеримых конечных почти всюду функций $S(V, d\nu)$ на некотором пространстве с мерой и

$$z \nu \{v \in V : |Ax(v)| > z\}^{1/q_i} \leq M_i \|x\|_{L_{p_i}} \quad (i = 0, 1)$$

для всех $x = x(t) \in L_{p_i}$ и $z > 0$. Если $1 \leq p_i \leq q_i < \infty$ ($i = 0, 1$), то оператор A действует из L_p в L_q , где $p^{-1} = (1 - \theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}$ и $q^{-1} = (1 - \theta)q_0^{-1} + \theta q_1^{-1}$ ($0 < \theta < 1$).

Эта теорема породила большое количество исследований, связанных с ее обобщением и уточнением. Один из наиболее интересных и полных результатов был получен в совместной работе С. Г. Крейна и Е. М. Семёнова [15] (первоначальный вариант в случае степенных функций был доказан Е. М. Семёновым в [16]). Сформулируем его.

Пусть функции $\kappa(t)$ и $\delta(t)$ измеримы и неотрицательны, $\delta([0, 1]) \subset [0, 1]$. Если E — симметричное пространство на $[0, 1]$, то через $E_{\kappa, \delta}$ обозначим множество всех функций $x = x(t)$, для которых

$$\|x\|_{\kappa, \delta} = \|x^{**}(\delta(t))\kappa(t)\|_E < \infty,$$

где $x^{**}(s) = 1/s \int_0^s x^*(u) du$, а $x^*(u)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(u)|$. Пусть, кроме того, $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ — неотрицательные вогнутые функции, такие, что область значений $\psi_0(s)/\psi_1(s)$ содержит область значений $\varphi_0(s)/\varphi_1(s)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \sup_s \frac{\varphi_1(ts)}{\varphi_1(s)}}{\ln t} < \alpha_E \leq \beta_E < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \sup_s \frac{\varphi_0(ts)}{\varphi_0(s)}}{\ln t},$$

где α_E и β_E — индексы Бойда симметричного пространства E [17].

Если линейный оператор A непрерывен из $\Lambda(\varphi_i)$ в $M(\psi_i)$, то A непрерывен из E в $E_{\kappa, \delta}$, где $\delta(t)$ — измеримое решение уравнения

$$\frac{\psi_0(\delta(t))}{\psi_1(\delta(t))} = \frac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)} \quad \text{и} \quad \kappa(t) = \frac{\psi_0(\delta(t))}{\varphi_0(t)}.$$

Заметим, что при весьма общих предположениях построенное пространство $E_{\kappa, \delta}$ оптимально (т.е. не может быть уменьшено).

Вопросы оптимальности интересовали Е. М. Семёнова и в связи с другим основополагающим в теории интерполяции результатом — теоремой Рисса-Торина. А. П. Кальдерон [18], а также В. А. Дикарев и В. И. Мацаев [19] независимо доказали, что в случае $p_i \leq q_i$ ($i = 0, 1$) ("нижний треугольник") эту теорему можно усилить. Аналогичный вопрос для "верхнего треугольника" (т.е. случая $p_i > q_i$ ($i = 0, 1$)) оставался открытым до 1981 г., когда А. А. Дмитриев и Е. М. Семёнов доказали оптимальность теоремы Марцинкевича в этой ситуации [20]. С интерполяционной теоремой Марцинкевича тесно связано важное свойство устойчивости вещественного метода интерполяции, рассматривавшееся Е. М. Семёновым позднее в работе [21].

Еще в начале 60-ых годов Ж. -Л. Лионс и Э. Мадженес [22] поставили вопрос о том, будет ли интерполяционным между $C(\bar{D})$ и $C^n(\bar{D})$ пространство $C^k(\bar{D})$ ($0 < k < n$) (через $C^l(\bar{D})$ обозначается пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций на замыкании открытого множества $D \subset \mathbb{R}^s$). Аналогичный вопрос был задан также и для пространств Соболева $W_1^l(\bar{D})$. Задачи эти достаточно долго не поддавались решению даже в случае троек (C, C^2, C^1) функций на отрезке и (L_1, W_1^2, W_1^1) на окружности. Отрицательный ответ (наряду с рядом других результатов) был дан в двух совместных работах Б. С. Митягина и Е. М. Семёнова [23] и [24]. Они показали, что пространство $C^k(\bar{D})$ не является интерполяционным между $C(\bar{D})$ и $C^n(\bar{D})$, а $W_1^k(\bar{D})$ — между $L_1(\bar{D})$ и $W_1^n(\bar{D})$ ($0 < k < n$).

Еще раньше Е. М. Семёнов заинтересовался другим вопросом, относящимся к пространствам гладких функций — интерполяцией операторов, ограниченных в пространствах Липшица. Пусть $\varphi(t)$ — неотрицательная возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$. Через $\text{Lip } \varphi$ обозначим множество всех функций $x = x(t)$, для которых существует $C > 0$, такое, что для всех $0 \leq s \leq t \leq 1$

$$|x(s) - x(t)| \leq C\varphi(t - s).$$

В работе [25] Е. М. Семёнов нашел точную интерполяционную теорему для пространств $\text{Lip } \varphi$. Заметим, что независимо и на другом пути аналогичный результат был получен Я.Петре [26].

В 1966 г. А.П.Кальдерон получил необходимые и достаточные условия, при выполнении которых банахово пространство измеримых функций интерполяционно между пространствами L_1 и L_∞ [18] (близкое утверждение независимо было доказано Б.С.Митягиным [27]). Вскоре в связи с этим результатом появилась гипотеза о возможности описания интерполяционных пространств с помощью так называемого \mathcal{K} -функционала Петре [28]. Он определяется следующим образом: если (X_0, X_1) — банахова пара, $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$, то

$$\mathcal{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i, i = 0, 1\}.$$

Гипотеза заключается в следующем. Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) — две банаховы пары. Для того, чтобы тройка (X_0, X_1, X) была интерполяционной относительно тройки (Y_0, Y_1, Y) , необходимо и достаточно, чтобы из того, что $x \in X$, $y \in Y_0 + Y_1$ и $\mathcal{K}(t, y; Y_0, Y_1) \leq \mathcal{K}(t, x; X_0, X_1)$, следовало: $y \in Y$ и $\|y\|_Y \leq C\|x\|_X$.

Одной из первых статей, посвященных проверке этой гипотезы, была совместная работа Е. М. Семёнова и А.А.Седаева [29]. Здесь получены два оказавшихся в последующем очень важными результата.

Первый из них подтверждает гипотезу в случае пространств $L_{1,a}$, $\|x\|_{L_{1,a}} = \int_V |x(v)|a(t) d\mu(v)$ ($a(v) \geq 0$). Пусть банахово идеальное пространство E интерполяционно между пространствами $L_{1,a}$ и $L_{1,b}$. Тогда из неравенства $\mathcal{K}(t, y; L_{1,a}, L_{1,b}) \leq \mathcal{K}(t, x; L_{1,a}, L_{1,b})$ ($t > 0$) и того, что $x \in E$, следует: $y \in E$ и $\|y\|_E \leq \|x\|_E$. Это утверждение, известное как теорема Седаева-Семёнова, стало затем основой для дальнейшего продвижения в изучении этой проблематики.

Вторая теорема работы [29] показала, что даже в случае конечномерных пространств аналогичное свойство может не выполняться. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, а $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ — вектор, полученный перестановкой $|x_1|$, $|x_2|$ и $|x_3|$ в убывающем порядке. Обозначим через E_0 и E_1 пространство \mathbb{R}^3 , взятое с нормой $\|x\|_{E_0} = x_1^* + x_2^*$ и $\|x\|_{E_1} = x_1^*$, соответственно. Доказано, что существует пространство E , интерполяционное относительно пары (E_0, E_1) , и векторы $a, b \in \mathbb{R}^3$, такие, что $\mathcal{K}(t, b; E_0, E_1) = \mathcal{K}(t, a; E_0, E_1)$ ($t > 0$), но $\|b\|_E > \|a\|_E$.

В 1978 г. вышла первая в отечественной литературе монография по интерполяции операторов [30]. Авторы — С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин и Е. М. Семёнов — подвели в ней определенный итог развития этого раздела функционального анализа, наметили дальнейшие пути. Эта книга, заметно отличаясь от других монографий по теории интерполяции (прежде всего, книг Й.Берга и Й.Лефстрема [31] и Х.Трибеля [32]) как освещением, так и отбором материала, сыграла и продолжает играть важную роль в ее развитии. Она переведена на английский язык и издана в США.

В 1986 г. в очередном томе "Итогов науки и техники" был опубликован обзор по теории интерполяции операторов [33], в написании которого принял участие и Е. М. Семёнов (вместе с Ю.И.Брудным и С.Г.Крейном).

Значительное место в научной деятельности Е. М. Семёнова занимают работы по геометрии функциональных пространств. Круг его интересов в этой области очень широк. В данном обзоре мы отмечаем только некоторые, наиболее характерные для его творчества, результаты. Евгений Михайлович настойчиво стремится к получению окончательных, точных результатов (необходимых и достаточных условий, полному описанию пространств с каким-либо характеристическим свойством и т.д.).

В работе [34] было обнаружено новое характеристическое свойство пространств L_p в классе всех симметричных пространств. Пусть G_k — множество всевозможных наборов попарно непересекающихся подмножеств e_1, e_2, \dots, e_k положительной меры и $E(e_1, e_2, \dots, e_k) = E(e)$ — подпространство в E , порожденное нормированными характеристическими функциями $\|\chi_{e_i}\|^{-1}\chi_{e_i}(t)$, $1 \leq i \leq k$.

Если для любого k пространства $E(e')$ и $E(e'')$ изометричны для любых $e', e'' \in G_k$, то $E \equiv L_p$.

Следствием этой теоремы является утверждение о том, что только в пространствах L_p канонические базисы всех подпространств $E(e)$ могут быть симметричными.

В совместных работах В.А.Родина и Е. М. Семёнова ([35], [36]) были обнаружены важные экстремальные свойства пространства G , которое является замыканием пространства L_∞ в пространстве Орлича L_M^* с $M(u) = \exp(u^2) - 1$. Сопря-

женное к пространству G пространство обозначим G' . В обзоре [37] Е. М. Семёновым была высказана важная гипотеза:

в симметричном пространстве $E([0, 1])$ существует дополняемое гильбертово подпространство $\iff G \subset E \subset G'$.

В уже упоминавшейся работе [36] было обнаружено, что это условие является критерием дополняемости подпространства, порожденного системой функций Радемахера.

Высказанная гипотеза привлекла внимание многих математиков и была подтверждена в работе французского математика И. Райно [38].

В работе [39] исследовались подпространства пространств L_p и пространств Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$. Здесь, в частности, было обнаружено одно интересное свойство пространств L_p . Для его формулировки введем одну числовую характеристику подмножества $A \subset L_p$:

$$\eta(A) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sup_{x \in A, x \neq 0} \frac{\|x^* \chi_{[0, \tau]}\|}{\|x\|}.$$

Оказалось, что при $1 \leq p < 2$ множество значений характеристики $\{\eta(H) : H\text{- подпространство } L_p\} = \{0, 1\}$ (состоит только из двух точек), а при $2 \leq p < \infty$ множество

$$\{\eta(H) : H\text{- подпространство } L_p\} = [0, 1] \text{ (заполняет отрезок)}.$$

В работе [40] был описан класс возрастающих, вогнутых функций φ , для которых

$$\inf_{e, f \subset [0, 1]; \text{mes } e, \text{mes } f > 0} \|Q_e A Q_f\|_{\Lambda(\varphi)} = 0$$

для любого линейного непрерывного в $\Lambda(\varphi)$ оператора A . Здесь Q_e обозначает оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0, 1]$. Там же аналогичная задача решается для пространств $M(\varphi)$ и $L_{p, q}$.

Значительный прогресс в развитии геометрии банаховых пространств во второй половине 20-го века был связан с понятиями типа и котипа Радемахера, введенными в 1972 году Хоффман-Йоргенсенем и Морэем.

Говорят, что банахово пространство имеет котип q (соответственно q -свойство Орлича), если существует постоянная $C > 0$, такая, что для любых элементов $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt$$

(соответственно

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \max_{\epsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\| dt).$$

Довольно долго было неизвестно, совпадают ли классы банаховых пространств с котипом 2 и с 2-свойством Орлича. В работе [41] такое совпадение было доказано для всех симметричных функциональных пространств. Для общих банаховых решеток такого совпадения нет. Соответствующий пример построен М. Талаграндом.

Изучению некоторых классов операторов, действующих между функциональными пространствами, посвящены работы [42], [43]. Пусть S — ортогональный проектор на подпространство констант:

$$Sx(t) = \int_0^1 x(s)ds.$$

В отмеченных работах найдено описание множества всех линейных ограниченных операторов T , таких, что

$$\|S + \epsilon T\|_{L_p \rightarrow L_q} = 1$$

для всех достаточно малых ϵ . Эти результаты были использованы для получения векторзначных аналогов неравенства Хинчина.

В работе [44] Е. М. Семёнов и Й. Аппель нашли условие на норму пространства с симметричным базисом, которое обеспечивает эквивалентность асимптотики дистанции Банаха-Мазура между конечномерными симметричными пространствами и нормы тождественного оператора.

Пусть n — натуральное число, $x = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ и S_n — группа перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Перестановка чисел $|x_{ij}|$ в убывающем порядке обозначается через $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$.

Пусть, далее, $1 \leq q \leq \infty$ и пусть l — биекция между S_n и $\{1, 2, \dots, n!\}$. В работе [45] определен квазилинейный оператор T_q :

$$T_q x(t) = \left(\sum_{i=1}^n |x_{i, \pi(i)}|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad t \in \left[\frac{l(\pi) - 1}{n!}, \frac{l(\pi)}{n!} \right),$$

со стандартной модификацией при $q = \infty$. Оператор T_q действует из множества $n \times n$ матриц во множество ступенчатых функций. Для симметричного пространства E норма $\|T_q x\|_E$ не зависит от l . Кроме T_q в [45] рассматривается оператор

$$Ux(t) = \sum_{k=1}^n x_k^* \chi_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}(t)$$

на множестве $n \times n$ матриц $x = (x_{ij})$, здесь χ_e — характеристическая функция измеримого $e \subset [0, 1]$. Авторы подробно исследуют класс F_q всех симметричных пространств, для которых имеет место эквивалентность:

$$\|T_q x\|_E \approx \|Ux\|_E + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} x^{*q} \right)^{\frac{1}{q}},$$

в которой константа эквивалентности не зависит ни от матрицы x , ни от n . Показаны разнообразные связи класса F_q с другими известными классами симметричных пространств.

В работе [46] Е. М. Семёнов возвращается к характеристизации пространств L_p среди всех симметричных пространств и получает её в очень далёких от работы [34] терминах. В [46] вводится понятие т.н. "красивого" (nice) симметричного пространства. Пусть E — симметричное пространство функций на $[0, \infty)$, и пусть

$E[0, 1]$ — его сужение на $[0, 1]$. Для заданной функции $a \in E[0, 1]$ через a_k обозначается сдвиг функции $a(t)$ на интервал $[k-1, k]$, Q_a — это подпространство, порожденное функциями $(a_k)_{k \geq 1}$. Если для любой функции $a \in E[0, 1]$ подпространство Q_a дополняемо в E , то пространство E называется "красивым". Класс всех таких пространств обозначим \mathcal{N} . Среди многих результатов работы [46] отметим упомянутую выше характеристизацию: пусть E — симметричное пространство, фундаментальная функция которого вместе с фундаментальной функцией двойственного пространства E' непрерывны в нуле. Эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $E \in \mathcal{N}$ и $E' \in \mathcal{N}$.
- 2) $E \equiv L_p$ для некоторого $1 < p < \infty$.

Е. М. Семёнов успешно применяет методы теории интерполяции для решения задач теории ортогональных рядов. Отметим наиболее известные его работы в этом направлении, послужившие началом целой серии исследований. Одной из первых была статья [47], результаты которой в переработанном виде вошли в монографию [30].

В работе [48] были детально изучены ряды по тригонометрической системе в симметричных пространствах. Отметим здесь один окончательный результат, характерный для творчества Е. М. Семёнова. Будем говорить, что банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций обладает B -свойством относительно ортонормированной системы функций ω_k , если для любой последовательности чисел $\alpha_k \rightarrow 0$ найдется функция $f \in E$ и последовательность номеров n_k такие, что $c_{n_k} = \alpha_k$, где c_{n_k} — коэффициенты Фурье функции f по системе ω_k . Было доказано, что в классе симметричных пространств только пространство L_1 обладает B -свойством относительно тригонометрической системы функций.

В работе [35] изучались свойства рядов по системе Радемахера, принадлежащих различным классам симметричных пространств. Расширение множества функциональных пространств позволило открыть неизвестное ранее явление однозначного определения функционального пространства по принадлежности суммы ряда Радемахера данному пространству. Кроме того, были получены необходимые и достаточные условия на сумму ряда, гарантирующие принадлежность коэффициентов пространству l_p для $1 < p < 2$. В дальнейшем эта работа послужила началом целой серии исследований ([35], [49–52]).

Недавние работы Е. М. Семёнова и его учеников подтверждают плодотворность идей и методов, развитых юбиаром. Так, в работе [53] для широкого класса пространств установлены точные границы смещения пространств образов операторов Харди и Беллмана относительно пространств определения для тригонометрических рядов. Аналогичные исследования для рядов по системе Хаара были проведены в работах [54], [55].

Значительное место в научной деятельности Е. М. Семёнова занимают работы по системе Хаара. Этой тематике посвящены статьи [55–65]. Большинство из полученных в них результатов вошло в недавно опубликованную за рубежом монографию [66] (в настоящее время готовится к печати русский вариант). Главная особенность их состоит в широком использовании методов теории операторов: свойства системы Хаара изучаются в терминах свойств операторов, естественным образом связанных с этой системой.

Упомянем здесь лишь наиболее интересные, на наш взгляд, результаты, полученные Е.М.Семёновым.

Глава 7 монографии [66] посвящена изучению поведения коэффициентов Фурье-Хаара функций из различных пространств. В частности, здесь найден критерий их стремления к нулю (теорема 7.а.1). Интересными являются также результаты о коэффициентах Фурье-Хаара для невозрастающих функций (теоремы 7.а.3 и 7.а.5). Например, для пространств L_p в этом случае норма функции определяется с точностью до эквивалентности последовательностью её первых коэффициентов в пачках системы Хаара. Общий случай рассматривается в теоремах 7.а.8, 7.а.11, 7.а.12. Здесь обнаружена связь некоторых оценок коэффициентов Фурье-Хаара с геометрическими свойствами пространств.

Подробно изучены классы абсолютно непрерывных (параграф 7.б) и непрерывных функций (параграф 7.с). Отдельный параграф посвящен коэффициентам Фурье-Хаара характеристических функций. Здесь, например, доказано, что коэффициенты Фурье-Хаара характеристических функций множеств меры $1/2$ могут быть сколь угодно малыми.

Глава 11 посвящена перестановкам системы Хаара. В теореме 11.6 приводится критерий ограниченности оператора перестановки из пространства Лоренца $L_{p,r}$ в $L_{q,r}$. На основе этой теоремы получен ряд просто проверяемых достаточных условий ограниченности оператора перестановки. В теореме 11.7 вычислена норма оператора перестановки в пространстве BMO .

Глава 12 посвящена мультипликаторам по системе Хаара. В частности, в теоремах 12.1 и 12.2 вычислена норма мультипликатора из L_p в L_q .

Глава 13 посвящена поточечным оценкам мультипликаторов по системе Хаара. Здесь изучается точность оценки

$$(\Lambda x)^*(t) \leq C \int_0^1 \frac{x^*(s)}{t+s} ds,$$

где Λ – мультипликатор по системе Хаара с коэффициентами $|\lambda_{n,k}| \leq 1$. Эта оценка следует из глубокого результата статьи [62]. Пусть

$$G_t(x) = \sup(\Lambda(ax))^*(t),$$

где supremum берется по всем функциям $a \in L_\infty$, $\|a\|_{L_\infty} \leq 1$ и всем мультипликаторам с коэффициентами $|\lambda_{n,k}| \leq 1$. В теореме 13.1 доказано, что для любой функции $x \in L_1$ и для любого $t \in (0, 1]$

$$G_t(x) \geq \frac{1}{4t} \int_0^t x(s) ds.$$

Далее этот результат уточняется для неотрицательных и невозрастающих функций x . В следствии 13.7 показано, что для таких функций

$$G_t(x) \geq \frac{1}{28} \int_0^1 \frac{x(s)}{t+s} ds.$$

Глава 14 посвящена оценкам мультипликаторов по системе Хаара в пространстве L_1 . Пусть для $x \in L_1$

$$F(x) = \inf \|\Lambda(ax)\|_{L_1},$$

где \inf берется по всем функциям $a \in L_\infty$, $|a(t)| \geq 1$ для любого $t \in [0, 1]$ и по всем мультипликаторам Λ с $|\lambda_{n,k}| = 1$. В теореме 14.1 доказано, что для любой неотрицательной и невозрастающей функций $x \in L_1$

$$F(x) \leq 4 \|x\|_{L_{1,\infty}},$$

где $\|x\|_{L_{1,\infty}} := \sup_{0 \leq t \leq 1} x^*(t)$. Далее установлено, что предположение о монотонности x здесь является существенным.

Последняя глава 17 монографии посвящена системе Олевского, которая тесно связана с системой Хаара. Доказано, что в шкале симметричных пространств система Олевского образует безусловный базис только в пространствах, изоморфных L_2 .

Евгений Михайлович Семёнов — автор более 130-ти научных работ, двух монографий. Работы Е. М. Семёнова получили широкое международное признание. Он активно и плодотворно сотрудничает с математиками разных стран, что хорошо видно по приведенной библиографии. Ссылки на его работы можно без труда найти в статьях не только российских, но и зарубежных математиков.

Е. М. Семёнов активно участвовал в организации и проведении широко известных зимних Воронежских школ. Его лекции слушали математики многих российских университетов. Е. М. Семёнов свободно владеет английским языком, что значительно облегчает его общение с зарубежными коллегами. Он участвовал в работах очень многих международных конференций, выступал с докладами и лекциями в аудиториях итальянских, испанских и американских университетов.

Е. М. Семёнов — доброжелательный и скромный человек, готовый в любое время обсуждать математические вопросы, и это неизменно привлекает к нему внимание как сложившихся математиков, так и студентов, и аспирантов. Кроме того, Е. М. Семёнов — сторонник здорового образа жизни, он активно занимался альпинизмом, что также привлекает к нему научную молодежь, воспитанием которой он активно занимается.

Около 20-ти его учеников стали кандидатами, а трое из них — докторами физико-математических наук.

С 1971 года и по настоящее время Е. М. Семёнов является профессором кафедры теории функций и геометрии Воронежского университета, с 1978 г. по 1983 г. он работал деканом математического факультета.

Свой юбилей Евгений Михайлович встречает в расцвете творческих сил, у него много новых идей и замыслов. Пожелаем ему доброго здоровья, новых успехов в математике, талантливых учеников, удачи в реализации всего задуманного.

Список литературы

- [1] Riesz M. *Sur les maxima des formes bilineaires et sur les fonctionelles lineaires*// Acta Math. 1926. V. 49. P. 465-497.
- [2] Thorin G. O. *An extension of convexity theorem due to M.Riesz*// Comm. Sem. Math. Univ. Lund. 1939. V. 4. P.1-5.
- [3] Orlicz W. *Ein Satz über die Erweiterung von Linearen Operationen*// Studia Math. 1934. V. 5. P. 127-140.
- [4] Marcinkiewicz J. *Sur l'interpolation d'operateurs*// C. R. Acad. Sci. Paris. 1939. V. 208. P. 1272-1273.
- [5] Zygmund A. *On a Theorem of Marcinkiewicz Concerning Interpolation of Operations*// J. Math. Pures Appl. 1956. V. 35, т2. P. 223-248.
- [6] Крейн С. Г., Семёнов Е. М. *Об одной шкале пространств*// ДАН СССР. 1961. Т. 138, т4. С. 763-766.
- [7] Lorentz G. G. *On the theory of spaces Λ* // Pacific J. Math. V. 1, т3. P.411-429.
- [8] Семёнов Е. М. *Об одной шкале пространств с интерполяционным свойством*// ДАН СССР. 1963. Т. 148, т5. С. 1038-1041.
- [9] Calderon A. P. *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*// Studia Math. 1964. V. 24, т2. P. 113-190.
- [10] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. *Гипершкалы банаховых структур*// ДАН СССР. 1966. Т. 170, т2. С. 265-267.
- [11] Luxemburg W. A. *Banach Function Spaces*. Van Nostrand and C. Assen, 1955.
- [12] Семёнов Е. М. *Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций*// ДАН СССР. 1964. Т. 156, т6. С. 1292-1295.
- [13] Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. Toronto, Univ. of Toronto Press, 1953.
- [14] Halperin J. *Canad. J. Math.* 1953. V. 273, т273.
- [15] Крейн С. Г., Семёнов Е. М. *Интерполяция операторов ослабленного типа*// Функц. анал. и его прил. 1972. Т. 7, т2. С. 89-90.
- [16] Семёнов Е. М. *Одна новая интерполяционная теорема*// Функц. анал. и его прил. 1968. Т. 2, т2. С. 68-80.
- [17] Boyd D. W. *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*// Canad. J. Math. 1969. V. 21, т5. P. 1245-1254.
- [18] Calderon A. P. *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*// Studia Math. 1966. V. 26, т3. P. 273-299.
- [19] Дикарев В. А., Мацаев В. И. *Точная интерполяционная теорема*// ДАН СССР. 1966. Т. 168, т5. С. 986-988.

- [20] Дмитриев А. А., Семёнов Е. М. *Оптимальность интерполяционной теоремы М.Рисса в верхнем треугольнике*// ДАН СССР. 1981. Т. 258, т6. С. 1298-1300.
- [21] Semenov E. M. *On the stability of real interpolation method in the class of rearrangement invariant spaces*// Israel Math. Conf. Proc. 1999. V. 13. P. 172-182.
- [22] Мадженес Э. *Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных*// УМН. 1966. Т. 21, т2. С. 169-218.
- [23] Митягин Б. С., Семёнов Е.М. *Пространство C^k не является интерполяционным между C и C^n* // ДАН СССР. 1976. Т. 228, т3. С. 543-546.
- [24] Митягин Б. С., Семёнов Е.М. *Отсутствие интерполяции линейных операторов в пространствах гладких функций*// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, т6. С. 1289-1328.
- [25] Семёнов Е. М. *Интерполяция линейных операторов в пространствах функций с заданным модулем непрерывности*// В сб. "Материалы 7-й мат. и 7-й физ. межвуз. науч. конф. Дальн. Вост.". Хабаровск. 1968. С. 33-34.
- [26] Peetre J. *Exact interpolation theorems for Lipschitz continuous functions*// Ric. mat. 1969. V. 18, т2. P. 239-259.
- [27] Митягин Б. С. *Интерполяционная теорема для модулярных пространств*// Матем. сб. 1965. Т. 66, т4. С. 473-482.
- [28] Peetre J. *Espaces intermediaires et la theorie constructive des fonctions*// С. г. Acad. sci. 1963. V. 256, т1. P. 54-55.
- [29] Седаев А. А., Семёнов Е. М. *О возможности описания интерполяционных пространств в терминах K -метода Питре*// В сб. тр. ин-та мат. Сиб. отд. АН СССР. 1971. Вып. 4(21). С. 98-114.
- [30] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М. *Интерполяция линейных операторов*. М.: Наука, 1978.
- [31] Берг Й., Лёфстрём Й. *Интерполяционные пространства. Введение*. М.: Мир, 1980.
- [32] Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*. М.: Мир, 1980.
- [33] Брудный Ю. И., Крейн С. Г., Семёнов Е. М. *Интерполяция линейных операторов*// В сб. "Итоги науки. Математический анализ, 1986". М.: ВИНТИ. Т.24. С.3-163.
- [34] Браверман М. Ш., Семёнов Е. М. *Характеристические свойства пространств L_p* // ДАН СССР. 1980. Т. 255, т2, С. 270-272.
- [35] Rodin V. A., Semenov E. M. *Rademacher series in symmetric spaces*// Anal. Math. 1975. V. 1. т3. P. 207-222.

- [36] Родин В.А., Семёнов Е. М. *Дополняемость подпространства, порожденной системой функций Радемахера*// Функци. анализ и его прил. 1979. Т. 13. т2. С. 91-92.
- [37] Семёнов Е. М. *Геометрия функциональных пространств*// Школа по теории операторов. Новосибирск, Ин-т математики СО АН СССР 1979. 14 стр.
- [38] Raupaud Y. *Complemented hilbertian subspaces in rearrangement invariant function spaces*// Illinois J. Math. 1995. V. 39. P. 212-250 .
- [39] Новиков С.Я., Семёнов Е. М., Токарев Е. В. *Структура подпространств пространств $\Lambda_p(\varphi)$* // ДАН СССР. 1979. Т. 247.т3. С. 552-554.
- [40] Семёнов Е. М., Штейнберг А.М. *Оценки норм операторных блоков в банаховых решетках*// Матем. сб. 1985. Т. 126, т3. С. 327-343.
- [41] Семёнов Е. М., Штейнберг А. М. *Свойство Орлича симметричных пространств*// 1990. ДАН СССР. Т. 314, т6, С. 1341-1344.
- [42] Семёнов Е. М., Шнейберг И. Я. *Гиперсжимающие операторы и неравенства Хинчина*// Функци. анализ и его прил. 1988. Т. 22.т3, С. 87-88.
- [43] Семёнов Е. М., Шнейберг И. Я. *Сжимающие операторы и неравенства Хинчина*// Сиб. мат. ж. 1990. Т. 31, т1. С. 141-149.
- [44] Appell J. and Semenov E. M. *Estimating the Banach-Mazur Distance of Some Pairs of Symmetric Spaces*// Math. Nachr. 1987. V. 132, т1. P.7-14.
- [45] Montgomery-Smith S. and Semenov E. M. *Random Rearrangements and Operators*// Amer. Math. Soc. Transl. 1998. V. 184. P.157-183.
- [46] Hernandez F.L. and Semenov E. M. *Subspaces Generated by Translations in Rearrangement Invariant Spaces*// J. Funct. Anal. 1999. V. 169. P.52-80.
- [47] Семёнов Е. М. *Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье* // ДАН СССР. 1967. Т. 176, т6. С. 1251-1254.
- [48] Гулисашвили А.Б., Родин В.А., Семёнов Е. М. *Коэффициенты Фурье суммируемых функций*// Матем. сб. 1977. Т. 102, т3. С. 362-371.
- [49] Montgomery-Smith S. J. *The distribution of Rademacher sums*// Proc. AMS. 1990. V. 109, т2. P.517-522.
- [50] Родин В.А., Семёнов Е. М. *К вопросу о рядах Радемахера в симметричных пространствах*// Сб. науч.-практ.конф. ВВШ МВД России. Воронеж. 1994. С. 5-6.
- [51] Овчинников В.И., Распопова В. Д., Родин В. А. *Точные оценки коэффициентов Фурье суммируемых функций и K -функционалы* // Матем.заметки. 1982. Т. 32, т3. С. 295-302.
- [52] Асташкин С. В. *О рядах по системе Радемахера в симметричных пространствах, "близких" к L_∞* // Функци. анализ и его прил. 1998. Т.32, т3, С.62-65.

- [53] Родин В. А. *Преобразование Харди и Беллмана в пространствах, близких к L_∞ и L_1* // Записки науч.семинара ПОМИ. 1999. Т. 262. С. 204-213.
- [54] Монтгомери-Смит С., Семёнов Е. М. *Усреднение коэффициентов Фурье-Хаара*// Матем. сб. 1999. Т. 190, т10, С. 49-64.
- [55] Montgomery-Smith S., Semenov E. M. *Averaging of Fourier-Haar coefficients*// Sbornik: Math. 1999. V. 190, т10, P. 1449-1463.
- [56] Семенов Е.М. *Об эквивалентности в L_p перестановок системы Хаара*// ДАН СССР. 1978. Т.242, т6. С.1258-1260.
- [57] Semenov E.M. and Stockert B. *Haar system rearrangement in the space L_p* // Analysis Math. 1981. V.7, т4. P.277-298.
- [58] Семенов Е.М. *Об ограниченности операторов, переставляющих систему Хаара в пространствах L_p* // Integral Equation and Operator Theory. 1983. V.6, т3. P.385-404.
- [59] Semenov E.M. and Tsirelson B.S. *Problem of smallness of operator blocks in L_p spaces*// Zeit. fur Anal. and ihre Anwend. 1983. V.2, т4. P. 367-573.
- [60] Новиков И.Я., Семенов Е.М. *О коэффициентах Фурье-Хаара*// Мат. заметки. 1984. Т.36, т3. С.351-358.
- [61] Семенов Е.М. *Максимальный оператор Кальдерона*// ДАН СССР. 1990. Т.315, т1. С. 31-34.
- [62] Semenov E.M. *Estimates for operator of weak type*// Proc. Int. Symp. Sapporo. Japan. 31 Aug – 4 Sep., 1990. Function analysis and related topics. Singapore, 1991. P.172-178.
- [63] Семенов Е.М. *Базисные свойства системы Олевского*// Мат.заметки. 1993. Т.54, т3. С.155-156.
- [64] Семенов Е.М. *Перестановки системы Хаара в пространствах Лоренца*// Сиб.мат.ж. 1993. Т.34, т6. С.158-164.
- [65] Семенов Е.М. *Оценки мультипликаторов по системе Хаара в пространстве L_1* // Докл. РАН. 1994. Т.334, т5. С.564-565.
- [66] Novikov I., Semenov E. *Haar series and linear operators* // Kluwer Academic Publisher, 1996.